
ADRIAN MIROIU

INTRODUCERE ÎN LOGICA FILOSOFICĂ

VOLUMUL I
LOGICĂ ȘI FORMALIZARE

Editura Universității București,
1994

C U P R I N S

Notă asupra volumului	5
Introducere	7
§ 0.1. Ce este logica?	7
§ 0.2 Ce este logica filosofică?	17
PARTEA I. LOGICA PROPOZIȚIILOR	
Capitolul I. Metateoria logicii propozițiilor	23
§ 1. Conective logice	23
§ 2. Limbajul formal al logicii propozițiilor	30
§ 3. Validitate și tautologie	32
§ 4. Consecință și deducție	36
§ 5. Teorema de compactitate	46
§ 6. Exerciții	55
Capitolul II. Propoziții și judecăți	60
§ 7. Propozițiile ca purtători ai adevărului	60
§ 8. Conceptul de judecată	65
PARTEA A II-A. LOGICA DE ORDINUL ÎNTÂI A PREDICATELOR	
Capitolul III Metateoria logicii de ordinul întâi a predicatelor.	83
§ 9. Limbaje și modele	83
§ 10. Formalizarea limbajelor de ordinul întâi	89
§ 11. Noțiunea de satisfacere	94
§ 12. Teorii de ordinul întâi	106
§ 13. Teoremele de completitudine și compactitate	111
§ 14. Teoremele Löwenheim-Skolem	128
§ 15. Teoremele de interpolare și definibilitate	130
§ 16. Caracterizarea logicii de ordinul întâi a predicatelor	138
§ 17. Exerciții	150
Capitolul IV. Cuantificare și formalizare	154
§ 18. Propozițiile categorice	156
§ 19. Cuantificarea restrânsă și logicile multisortate	162
§ 20. Descripțiile	169
§ 21. Existența	180
§ 22. Exerciții	195
Bibliografie selectivă	200

INTRODUCERE

§ 0.1. Ce este logica?

Se zice adesea că logica este știința raționamentelor. Cu ajutorul ei, dintre toate raționamentele posibile, le alegem pe cele *valide*. Dar, ce face ca un raționament (sau, cum se mai zice: un argument) să fie valid?

Un raționament este un șir de propoziții; ultima dintre ele e numită *concluzie*, iar celelalte *premise*. De multe ori, un raționament se întâmplă să cuprindă subraționamente, în care, din anumite premise, se trag concluzii: aceste concluzii intermediare servesc apoi drept premise în alte subraționamente ori în raționamentul principal. Dar, pentru moment, să lăsăm la o parte această complicație.

Între premisele și concluzia unui raționament noi afirmăm că există o anumită legătură; și anume, spunem că, în cazul când raționamentul este valid, avem:

(0.1) *Dacă* premisele sale sunt adevărate, *atunci* și concluzia va fi adevărată.
Să luăm câteva exemple de raționamente valide:

(0.2.1) Sau Steaua sau Dinamo va câștiga campionatul de fotbal anul acesta.
Steaua nu va câștiga campionatul de fotbal anul acesta.

Dinamo va câștiga campionatul de fotbal anul acesta.

(0.2.2) Toți peștii sunt mamifere.

Toți delfinii sunt pești.

Toți delfinii sunt mamifere.

(0.2.3) Vasile este om de afaceri.

Vasile este om inteligent.

Unii oameni de afaceri sunt inteligenți.

Primul dintre aceste trei raționamente este evident valid; la fel și al treilea. Observăm, mai mult, că pentru a admite că ele sunt valide, nici nu trebuie să presupunem cunoștințe suplimentare despre persoanele sau echipele de fotbal de care este vorba: s-ar putea să nu știm nimic despre Vasile, cu excepția

faptului că cele două propoziții despre el sunt adevărate; tot așa, cineva ar putea să admită că primul raționament este valid chiar dacă, până atunci, nu auzise de Steaua și de Dinamo. Această situație indică ceva foarte important: pentru a admite că un raționament este valid, nu este nevoie să cunoaștem efectiv valorile de adevăr ale premiselor și concluziei. Așa cum se arată în (0.1), tot ce e nevoie să știm este că *dacă* premisele sunt adevărate, *atunci* la fel va fi și concluzia; or, astfel nu se spune nimic despre felul în care *realmente* sunt premisele și concluzia.

Dacă s-ar fi cerut ca într-un raționament valid premisele să fie neapărat adevărate, atunci desigur că raționamentul (0.2.2) ar fi trebuit să fie considerat invalid, căci premisele lui sunt evident false. Dar el este valid, și anume pentru că și în cazul lui este adevărat că: dacă premisele sale ar fi fost adevărate, atunci și concluzia ar fi fost neapărat adevărată. Dacă deci am fi acceptat premisele, ar fi fost imposibil, în același timp, să respingem concluzia.

Vom conchide că validitatea sau invaliditatea unui raționament nu depinde de valorile de adevăr pe care se întâmplă să le aibă propozițiile pe care le cuprinde acesta. În al doilea rând, să observăm că validitatea sau invaliditatea lui nu depind nici de faptul că în acele propoziții se spune ceva determinat despre anume persoane, obiecte ori echipe de fotbal. Cel de-al doilea raționament nu îl vizează de fapt deloc pe Vasile ca persoană; că e așa se poate vedea dacă înlocuim numele „Vasile” cu numele „Ion” în (0.2.3). Obținem:

(0.2.4) Ion este om de afaceri.

Ion este om inteligent.

Unii oameni de afaceri sunt inteligenți.

Ca și (0.2.3), raționamentul (0.2.4) este valid. Validitatea lui nu depinde de faptul că s-a întâmplat să afirmăm ceva despre o anumită persoană; mai degrabă, validitatea lui depinde de ceea ce are în comun cu (0.2.3).

În amândouă aceste raționamente, în fiecare premisă, se afirmă că un anume obiect are o anumită proprietate, iar în concluzie se afirmă că unele obiecte care au prima proprietate o au și pe a doua. Vom spune că cele două raționamente au în comun următoarea *schemă de raționament*:

(0.3.1) a este P

a este Q

Unii P sunt Q

Aici literele P și Q stau pentru expresii care referă la proprietăți, iar a stă pentru o expresie care referă la un obiect. De pildă, P poate sta pentru expresia „om de afaceri”; această expresie *referă* la proprietatea diferitelor persoane de a fi oameni de afaceri. Apoi, a poate sta pentru, să zicem, numele „Ion”; acest nume *referă* la omul Ion. Să mai observăm următorul lucru: expresiile

„om de afaceri“, „inteligent“, „Ion“, „Vasile“ sunt expresii ale limbii române; raționamentele (0.2.3) și (0.2.4) au fost formulate în această limbă. Aceste expresii referă la diverse entități – unele la persoane, altele la proprietăți ale acestora etc. Dar literele P , Q , a nu sunt cuvinte ori expresii ale limbii române; de aceea, nu putem să spunem că și ele referă la anumite entități. Putem să zicem însă altceva: că ele stau în locul expresiilor din limba română; le folosim pentru diverse scopuri (de pildă, pentru a arăta care este schema de raționament pe care o au în comun mai multe raționamente), iar când e nevoie să trecem la afirmații despre raționamente concrete, indicăm precis care sunt expresiile pentru care stau aceste litere. Expresiile ce apar într-o schemă în raționament nu sunt de aceea propoziții, ci *scheme propoziționale*. De exemplu, „ a este P “ nu e o propoziție: ea nu e nici adevărată și nici falsă. Dar ea stă pentru, să zicem (în cazul în care luăm pe a ca stând pentru „Ion“, iar pe P ca stând pentru „om de afaceri“): „Ion este om de afaceri“; despre această propoziție ne putem întreba acum dacă e adevărată ori falsă.

Într-o schemă de raționament precum (0.3.1), literele a , P , Q am văzut că pot sta pentru diverse expresii. Iar în urma oricărei înlocuiri a lor cu expresii corespunzătoare va rezulta un raționament valid, precum (0.2.3) ori (0.2.4). Prin urmare, faptul că toate aceste raționamente sunt valide nu depinde de înțelesul acestor expresii particulare. Dar expresiile „este“, „sunt“, „unii“ nu se înlocuiesc; ele sunt păstrate constante. Validitatea raționamentelor de forma lui (0.2.2) ori (0.2.4) va depinde (între alte lucruri), de înțelesul acestor expresii.

Să luăm acum raționamentul (0.2.1). E limpede că, și în cazul lui, faptul că îl acceptăm ca valid nu depinde de înțelesul expresiilor „Steaua“, „Dinamo“ ori „va câștiga campionatul de fotbal anul acesta“. Că e așa se vede dacă vom considera următorul raționament:

(0.2.5) Sau Italia sau Croația va câștiga campionatul european de baschet de anul viitor.

Croația nu va câștiga campionatul european de baschet de anul viitor.

Italia va câștiga campionatul european de baschet de anul viitor.

Cele două raționamente au în comun următoarea schemă:

(0.3.2.) A sau B .

Nu- A

B

Literele A și B stau pentru propoziții oarecare: înlocuindu-le cu propoziții (ale limbii române, de pildă), obținem raționamente efective. Validitatea raționamentelor noastre (0.2.1.) și (0.2.5.) nu depinde de conținutul propozițiilor pentru care stau A și B , ci (între altele) de înțelesul expresiilor „sau“ și „nu“.

Vom spune că o astfel de schemă de raționament este validă dacă orice substituie a literelor ce apar în ea cu propoziții (sau, precum în cazul schemei (0.3.1), orice substituie a literelor cu expresii precum „om de afaceri“, „Ion“ etc.) dă naștere unui raționament valid; invers, o schemă de raționament este invalidă dacă prin substituie se obține uneori un raționament cu premise adevărate, iar concluzia falsă. Dacă un raționament este valid și, în plus, premisele sale sunt adevărate, vom spune că el este *corect*. Un raționament valid este *incorect* dacă cel puțin una dintre premisele lui este falsă.

1. *Natura logicii*. Afirmația, pe care am menționat-o mai devreme, că logica este știința raționamentelor, este imprecisă. În primul rând, pentru că nu este menționat explicit faptul că investigația logică urmărește să selecteze raționamentele valide din clasa tuturor raționamentelor posibile. Mai corect ar trebui, deci, să zicem că logica este știința raționamentelor valide. În al doilea rând, în cercetarea validității raționamentelor, logica ține cont de expresii precum „este“, „unii“, „nu“, „sau“ – care sunt numite *constante logice*. Am văzut că validitatea unui raționament depinde de proprietățile expresiilor de acest tip care apar în el. În acest sens, logica este studiul teoretic al constantelor logice. În al treilea rând, va trebui să se precizeze ce se înțelege printr-un raționament *valid*. În al patrulea rând, fiecare raționament este formulat într-un anumit limbaj. Uneori, propozițiile din limba naturală au o formă gramaticală care ne poate înșela. Să luăm, de pildă, propoziția:

(0.4.1.) Omul este singura ființă care amână.

Aparent, în această propoziție se afirmă că omul posedă proprietatea de a fi o ființă care amână și, în plus, că el e singura ființă de acest gen. Dar, desigur că atunci când afirmăm acest lucru, nu vrem să afirmăm ceva despre o anume ființă numită „omul“, fie ea concretă ori abstractă; noi vrem să spunem ceva despre oameni, că numai ei au proprietatea de a amâna. Propoziția noastră spune deci:

(0.4.2.) Oamenii sunt singurele ființe care amână.

De data aceasta, se afirmă nu că omul are o proprietate, ci că *fiecare* om o are. Dar, dacă privim cu și mai multă atenție, vedem că în (0.4.2) subiectul despre care realmente se afirmă ceva nu este exprimat prin „oamenii“. Gramatical așa s-ar părea, însă sensul propoziției noastre e altul: acela că nu vom putea găsi o ființă care nu e om și care, în același timp, amână. Prin, urmare, că

(0.4.3) Toate ființele care amână sunt oameni.

În (0.4.3) subiectul este expresia „ființele care amână“; prin această propoziție se afirmă că toate aceste ființe au proprietatea de a fi oameni. Așadar, înțelesul unei propoziții poate fi foarte diferit de cel pe care îl indică, aparent, gramatica.

Exemplul acesta sugerează că cercetarea logică este strâns legată de cercetarea caracteristicilor limbajelor în care sunt formulate raționamentele noastre. Pe această cale, logica devine interesantă pentru lingvistică, fiindcă logicianul, interesat de înțelesul constantelor logice, încearcă să ofere o abordare precisă a felului în care acestea funcționează în cadrul propozițiilor noastre, în particular a felului în care înțelesul lor contribuie la înțelesul acestor propoziții.

Cel de-al cincilea (și cel mai important) sens în care afirmația că logica e știința raționamentelor nu e de natură să ne mulțumească este următorul. Ea lasă fără răspuns precis întrebarea: în ce direcție trebuie să-și îndrepte logicianul eforturile?

S-ar putea formula cel puțin trei răspunsuri la această întrebare:

a) *Abordarea locală*. Potrivit acestei strategii, scopul logicianului este de a construi o colecție cât mai cuprinzătoare de raționamente (sau de scheme de raționament) valide. În cercetările sale, el urmărește să descopere noi raționamente sau scheme de raționament. Aristotel a arătat care sunt inferențele imediate valide și a descoperit silogismele valide din cele trei figuri: logicienii ce au lucrat în tradiția aristotelică au îmbogățit acest inventar cu, de pildă, inferențele care privesc termenii negativi sau cu silogismele din figura a patra, nearistotelică. Apoi, în secolul trecut, unii logicieni (precum Boole, De Morgan, Frege etc.) au adăugat raționamentele propoziționale; în sfârșit, Frege și urmașii săi au dezvoltat logica predicatelor, o teorie în care s-a creat câmp larg descoperirii unor noi și noi raționamente (sau scheme de raționament) valide. Probabil că, în aceeași strategie, ultimul rezultat important a fost cel obținut în anii '50 de W. Craig (teorema ce îi poartă numele).

b) *Abordarea sistemică*. Potrivit strategiei locale de investigare logică, se admite că există ceva de genul unei logici universale, care caracterizează *toate* raționamentele valide posibile. În practică însă, adică în cercetarea raționamentelor pe care le facem atunci când studiem un domeniu particular de obiecte, se iau în considerare numai anumite clase de raționamente. Această clasă depinde de genurile de expresii pe care le cuprinde limbajul în care vorbim despre acel domeniu de obiecte.

Atari clase de raționamente valide se numesc *sisteme logice*. Astfel, *silogistica aritotelică* (a se vedea § 18), primul sistem logic apărut în istoria acestei discipline, privește raționamentele (și schemele de raționament) a căror validitate depinde de înțelesurile expresiilor de felul „toți”, „unii”, „nici unul”, „nu”, „este”. Singurele propoziții avute în vedere sunt cele numite *categorice*: în cadrul lor se afirmă (sau se neagă) un predicat P despre un subiect S ; ele au deci forma $S-P$, de pildă „Toți S sunt P ” sau „Unii S nu sunt P ”. Orice altceva care ar putea afecta validitatea raționamentelor nu este luat în seamă.

De pildă, raționamentul (0.2.2) este formulat în silogistică. *Logica propozițiilor* (a se vedea capitolele I și II mai jos) este un alt sistem logic; ea privește raționamentele (și schemele de raționament) a căror validitate depinde de înțelesurile unor expresii precum „sau“, „dacă...atunci“, „nu“, „și“, „dacă și numai dacă“. Nimic altceva nu afectează validitatea raționamentelor cercetate în acest cadru; propozițiile sunt considerate ca întreg și nu contează structura lor internă. Raționamentele (0.2.1) și (0.2.5), schema de raționament (0.3.2) sunt valide în acest sistem logic. *Logica predicatelor* (pe care o vom studia în partea a doua a acestei lucrări) înglobează logica propozițiilor și, în plus, cercetează acele raționamente și schema de raționament care cuprind cuantificatori, precum „toți“, „unii“. Bunăoară, raționamentele (0.2.3) și (0.2.4), ca și schema de raționament (0.3.1) sunt studiate în acest sistem logic.

Conform strategiei sistemice, logicianul este interesat, în primul rând, de găsirea tuturor raționamentelor și schemelor de raționament care sunt cuprinse într-un sistem logic; el va putea admite că un anumit raționament, să zicem, este cuprins într-un sistem logic și nu poate fi dovedit ca valid într-altul. De pildă, în logica propozițiilor un raționament precum (0.2.2) nu este valid, deși este valid în silogistică.

Strategia sistemică poate fi dusă chiar mai departe: cum ce se urmărește este să se construiască un anumit sistem logic, nimic nu împiedică posibilitatea ca într-un sistem logic un raționament să fie valid, iar într-altul nu numai că el nu poate fi dovedit ca valid, dar – mai mult – el poate fi dovedit ca invalid. În logica propozițiilor se poate demonstra principiul așa-numit al terțului exclus:

(0.4) Orice propoziție este sau adevărată sau falsă, a treia posibilitate este exclusă.

Unii logicieni s-au îndoit însă de valabilitatea acestui principiu. Ei au considerat că, în unele contexte, el nu funcționează și nu trebuie să admitem că propozițiile nu sunt adevărate și nici false. De exemplu, logicianul polonez J. Łukasiewicz a argumentat că propozițiile despre viitor nu sunt nici adevărate, nici false și au o a treia valoare de adevăr: sunt posibile. Principiul (0.4) este respins în sistemul logic pe care îl dezvoltă el (așa-numita logică trivalentă).

Mergând pe acest drum, logicianul devine relativist: el nu mai consideră că există o logică unică, universală, ce ar cuprinde toate raționamentele posibile, despre orice obiecte posibile (cf. și § 16 mai jos). El admite însă că, în scopuri practice diferite, sunt relevante și trebuie folosite sisteme logice diferite. De aceea, scopul său e acela de a caracteriza cât de atent aceste sisteme. Acum însă el nu se mai apleacă asupra raționamentelor individuale; activitatea care

fi atrage cel mai mult atenția nu e aceea de a dovedi că un anumit raționament este valid (adică se cuprinde într-un anumit sistem logic). El e interesat de ceva mai important: de proprietățile generale ale *colecției* tuturor raționamentelor cuprinse într-un anumit sistem logic. Acum răsar întrebări de felul: Sunt reciproc compatibile raționamentele admise ca valide într-un sistem logic? (altfel zis: este necontradictoriu acel sistem logic?) Se poate găsi o mulțime de raționamente din care să putem deduce toate raționamentele valide într-un sistem logic, și numai pe ele? (astfel zis: este axiomatizabil acel sistem logic?) Există proprietăți structurale ale tuturor raționamentelor valide într-un sistem logic, independent de forma lor particulară? De pildă, în logica predicatelor se poate demonstra următorul lucru: să presupunem că Γ este o mulțime de propoziții. Vom spune că o propoziție φ este (într-un sistem logic anumit) consecința unei mulțimi Γ de propoziții adică există un raționament valid (în acel sistem logic) ale cărui premise sunt propoziții din Γ , iar concluzia φ . Mai departe, vom spune că Γ este necontradictorie dacă Γ nu are drept consecințe două propoziții contradictorii între ele, de exemplu φ și $\neg\varphi$. În logica predicatelor se poate demonstra că o mulțime Γ de propoziții este necontradictorie dacă și numai dacă orice submulțime finită a lui Γ este necontradictorie. Această proprietate poartă numele de teorema de compactitate.

Cu privire la diverse sisteme logice, pot fi demonstrate diverse teoreme de acest fel. Cum ele caracterizează proprietăți ale colecției raționamentelor cuprinse într-un anumit sistem logic, vom spune că ele exprimă *proprietăți structurale* ale acelor sisteme logice. De pildă, și în logica propozițiilor se demonstrează teorema de compactitate; dar în anumite sisteme de logică a predicatelor această teoremă nu mai este valabilă.

Strategia sistemică de investigație logică va fi urmărită cu precădere pe parcursul acestei lucrări. În principal în capitolele I și III vor fi demonstrate proprietățile structurale ale logicii propozițiilor și logicii de ordinul întâi a predicatelor – cele mai importante și mai bine cunoscute sisteme logice.

c) *Abordarea structurală.* O a treia strategie de a înțelege logica pornește de la existența proprietăților structurale ale sistemelor logice. Ea s-a dezvoltat relativ recent (primul rezultat remarcabil în această privință a fost obținut în anii '60 de către logicianul P. Lindström) și este, astăzi, în plină expansiune. Cum am văzut, colecțiile de raționamente valide (deci sistemele logice) sunt caracterizate prin anumite proprietăți structurale; unele colecții satisfac o sumă de astfel de proprietăți; alte colecții satisfac o altă sumă de astfel de proprietăți. Întrebarea pe care ne-o putem pune e dacă nu cumva, invers, e posibil ca o anumită colecție de proprietăți structurale să se potrivească unui singur sistem logic. Sensul acestei întrebări este următorul: potrivit strategiei sistemice, un sistem

formal era caracterizat prin conținutul său – colecția tuturor raționamentelor pe care le admite ca valide; existența unor proprietăți structurale ale unui sistem logic era considerată, mai curând, ca derivată din conținutul acesteia. Dar, potrivit strategiei structurale, se încearcă parcurgerea drumului în sens contrar: plecând de la o colecție de proprietăți structurale să se determine ce sisteme logice (ce colecții de raționamente) le satisfac. Interesant este faptul că, uneori se pot afla condiții de unicitate: unei anumite colecții de atari proprietăți structurale îi corespunde un și numai un sistem logic. De pildă, P. Lindström a construit o mulțime de proprietăți structurale care sunt împlinite de mai multe sisteme logice, dintre care *cea mai tare* este logica de ordinul întâi a predicatelor (cf. § 16 în capitolul III mai jos).

Se observă că obiectul de studiu al logicianului nu este același în fiecare din cele trei strategii de investigație logică: în primul caz, el caută să construiască raționamente (și scheme de raționamente) valide; în cel de-al doilea, interesul său era acela de a edifica sisteme logice – colecții de raționament valide; în sfârșit, cel ce lucrează ghidându-se de a treia strategie cercetează proprietățile sistemelor logice, astfel zis colecții de sisteme logice.

2. *Constantele logice.* Menționam mai devreme faptul că validitatea unui raționament nu depinde de înțelesul tuturor expresiilor ce apar în premisele și în concluzia acestuia, ci numai de înțelesul *constantelor logice*, expresii precum „un“, „și“, „sau“, „dacă... atunci“, „toți“, „unii“ etc.; am menționat, de asemenea, că nu orice sistem logic face apel la toate constantele logice.

Astfel, logica propozițiilor se construiește cu ajutorul unei subclase de constante logice – cea a *conectivelor logice* (cf. capitolul I mai jos). Întrebarea care se ridică în chip natural e următoarea: ce este o constantă logică?

Într-un raționament precum, să zicem (0.2.3) expresii ca „pește“, „mamifer“, „delfin“ am văzut că nu joacă un rol esențial. Am putea să le înlocuim cu alte expresii care referă la alte proprietăți, obținând tot un raționament valid; bunăoară, punând în locul lor expresiile „mamifer“, respectiv „vertebrat“ și „om“, obținem raționamentul:

(0.2.6) Toate mamiferele sunt vertebrate.

Toți oamenii sunt mamifere.

Toți oamenii sunt vertebrate.

care, și el, este valid. Validitatea nu depinde de acele expresii descriptive, ci de tipul raporturilor vizate între subiectul și predicatul fiecărei propoziții, deci de înțelesul expresiilor „toți“ și „sunt“. Raționamentele (0.2.2) și (0.2.6) sunt exprimate prin aceeași schemă de raționament:

(0.3.3) Toți P sunt Q

Toți R sunt P

Toți R sunt Q.

Vom spune că într-un sistem logic o expresie este constantă logică dacă ea are un rol în determinarea validității raționamentelor în acel sistem logic. Criteriul după care putem determina acest rol este faptul că acea expresie apare în *schemele de raționamente* cercetate în acel sistem logic. Constantele logice nu au un înțeles descriptiv: înțelesul lor este determinat în întregime de rolul jucat în cadrul raționamentelor.

Potrivit acestei modalități de a înțelege constantele logice, clasa acestor expresii nu este determinată a priori și nimic nu ne forțează să considerăm că o anumită expresie este sau nu este constantă logică. În diferite sisteme logice, expresii diferite pot conta drept constante logice, iar ceea ce pare descriptiv într-un sistem logic va putea fi considerat ca având înțeles logic într-alt sistem logic. Nu putem deci să trasăm, o dată pentru totdeauna, un hotar precis între expresii descriptive și logice; hotarul se poate muta uneori. Prin urmare, faptul că o expresie este sau nu constantă logică ține de rolul, de funcția ei, într-un sistem logic (în particular, de împrejurarea că ea determină structural conceptul de validitate în acel sistem logic), iar nu de vreo caracteristică *inerentă*, naturală a ei; a fi constantă logică e o funcție, și nici o expresie nu se naște cu ea, iar dacă este aleasă să o îndeplinească, nu îi e sortit să o poarte până la moarte. (În § 16 această chestiune va fi reluată, de acea dată cu ajutorul unor exemple, sper, convingătoare).

Expresii precum „toți“, „unii“, „nu“, „dacă...atunci“, „și“, „sau“, „dacă și numai dacă“ etc. sunt tratate în mod standard drept constante logice; altfel zis, sistemele logice cele mai bine elaborate și mai cunoscute – silogistica, logica propozițiilor, logica de ordinul întâi a predicatelor – apelează la unele din ele și numai la ele.

În ultimele decenii, în special, au fost construite încă și alte sisteme logice în care apar și alte constante logice. În § 16 vor fi menționate câteva, precum cuantificatorul „există infinit de multe obiecte încât...“; în unele sisteme logice încearcă să se formalizeze negația, conjuncția, implicația, cuantificatorii ce apar în limba naturală.

Unii logicieni au dezvoltat sisteme logice (*modale*) în care apar drept constante logice expresii precum „este posibil“ ori „este necesar“; alții au luat drept constante logice expresii precum „eu cred că“ ori „eu știu că“, dezvoltând sisteme de logică *epistemică*; alții s-au aplecat asupra expresiilor „este obligatoriu“, „este permis“ și, tratându-le drept constante logice, au elaborat diverse sisteme de logică *deontică* etc. Dar, trebuie subliniat, validitatea unui raționament într-un sistem logic nu depinde de înțelesurile tuturor expresiilor ce apar în propozițiile considerate; aceasta ar fi un nonsens. Însă, care sunt expresiile descriptive și care sunt constantele logice care apar într-un raționament – aceasta

e o problemă care nu are un răspuns prestabilit. Răspunsul depinde de sistemul logic relativ la care ne interesează să determinăm dacă acel raționament este valid sau nu.

3. *Limbaje formale.* În cursul acestei lucrări vom considera numai raționamente construite în cadrul unor limbaje formale. (Conceptul de limbaj formal va fi definit riguros în capitolul I și în capitolul III mai jos). Această opțiune are mai multe temeuri. Primul constă în împrejurarea că determinarea clasei raționamentelor valide într-un sistem logic face apel la schemele de raționament; pentru a le formula, noi nu ne folosim însă de expresii ale limbii naturale; așa cum, de pildă, raționamentele (0.2.2) și (0.2.6) sunt șiruri de propoziții într-o limbă naturală (limba română), tot așa schema de raționament (0.3.3) poate fi considerată ca un șir de expresii ale unui limbaj formal (cel al silogisticii aristotelice). Atunci când cercetează dacă un raționament e valid (potrivit strategiei locale de investigare logică), dacă un raționament se cuprinde sau nu într-un anumit sistem logic (când adoptă strategia sistemică de investigare logică) sau dacă o sumă de raționamente satisface o colecție de proprietăți structurale (când, în sfârșit, se ghidează după strategia structurală), obiectul prim al logicianului este o schemă de raționament sau o colecție de scheme de raționament. De aceea, cercetarea întreprinsă de logician apare, mai degrabă, ca o cercetare a raționamentelor dintr-un limbaj formal. Într-un limbaj formal expresiile folosite sunt de două feluri: constante logice și expresii descriptive. Cum, în cazul acestora din urmă, logicianul nu este interesat de înțelesurile lor particulare, ele sunt tratate ca neavând înțelesuri fixate, deci ca *variabile logice* ale acestui limbaj formal.

Un alt temei al opțiunii de a cerceta limbaje formale e acela că ele au câteva avantaje în raport cu limbile naturale. Astfel, în timp ce în limbile naturale unele expresii sunt ambigue și pot avea interpretări diferite, într-un limbaj formal această situație nu apare. Să presupunem, de pildă, că într-un raționament apare o premisă care, fiind ambiguă, poate fi interpretată în două feluri; s-ar putea, deci, ca raționamentul să fie valid numai într-una din cele două interpretări ale premisei. Fie, într-adevăr, următorul raționament:

(0.5) Șomerii și studenții căsătoriți beneficiază de reducere.

Fratele meu este șomer, dar nu beneficiază de reducere.

Fratele meu nu este căsătorit.

Dacă în (0.5) expresia „căsătorit“ este luată ca aplicându-se atât șomerilor, cât și studenților, raționamentul este valid. Dar dacă ea se ia ca aplicându-se numai studenților, atunci raționamentul nu mai e valid.

Limbile naturale au și alte dezavantaje: de pildă, în cazul lor este greu să se descrie cu precizie ce înseamnă că o expresie compusă este o propoziție corectă; în schimb, limbajele formale sunt construite precis și e întotdeauna posibil să decidem când o expresie este corect construită în acest limbaj. Or, adesea este nevoie să putem formula afirmații despre toate propozițiile unui limbaj ori despre toate propozițiile lui de o anumită formă; însă dacă nu putem spune ce înseamnă că un șir de simboluri este o propoziție corectă, atari afirmații nu mai pot fi făcute. De asemenea, întrucât, în cazul limbajelor formale, avem controlul asupra felului în care sunt produse propozițiile corecte, se poate evita apariția paradoxelor semantice, de felul celui al mincinosului – care însă nu au cum să fie blocate în limba naturală.

Desigur, însă, că adesea ne interesează dacă raționamentele formulate în limba naturală sunt corecte sau nu; pentru aceasta se procedează în felul următor: se „traduce” fiecare propoziție a raționamentului într-un limbaj bine ales și testăm apoi validitatea raționamentului astfel obținut. Se poate totuși ca uneori să nu reușim: raționamentul din limba naturală e mult mai complex și nu își află o traducere îndeajuns de fină în limbajul formal pe care l-am ales. În acest caz, strategia noastră de abordare devine mai complexă: trebuie să ne gândim să construim limbaje formale mai sofisticate, în care să putem formaliza un sistem logic mai puternic, în raport cu care să se decidă validitatea (traducerii) raționamentului nostru.

Aceasta este, astăzi, sarcina poate de căpătâi a logicianului. El își șlefuește unelte, construind sisteme logice mai puternice și mai complexe; și, nu în ultimul rând, el face apel la colaborarea specialiștilor din alte domenii – în primul rând la filosofii limbajului și la lingviști.

§ 0.2. Ce este logica filosofică?

Gândiți-vă că sunteți în bucătărie și vă pregătiți să faceți o mâncare. Felul cum va ieși aceasta depinde de doi factori: de calitatea materialelor pe care le folosiți, pe de o parte; și de măiestria în arta culinară pe care o veți etala, pe de altă parte. Când, în paragraful anterior, am abordat chestiunea privitoare la natura logicii, am avut în vedere doar cel de-al doilea aspect: a interesat ce putem construi cu materialele la îndemână, ce fel, adică, de mâncăruri suntem în stare să răcem.

Acum să trecem însă la primul aspect. Pentru a avea o mâncare bună, măiestria bucătarului e foarte importantă; dar nu e singura relevantă. Căci nu avem cum să ocolim problema materialelor pe care el le folosește în pregătirea fiecărui fel de mâncare. Să luăm un exemplu, cel mai simplu: cel în care

logicianul încearcă să construiască logica propozițiilor. Să admitem, mai mult, că avem a face cu un caz elementar: acela în care el caută să determine dacă un anumit raționament este valid. În întreprinderea sa, logicianul folosește (cel puțin) două feluri de materiale: *propozițiile* care intră în compunerea premiselor și a concluziei – și despre care el admite că au anumite caracteristici: au o valoare de adevăr (bunăoară, sunt adevărate sau false) – și *conectivile logice* care ajută la compunerea premiselor și a concluziei (și pe care el le exprimă cu ajutorul unor cuvinte precum „și”, „nu”, „sau”, „dacă ... atunci” etc.).

Problemele pe care și le pune logicianul sunt de două mari genuri. Mai întâi, el se poate întreba: *Este acel raționament valid?* Iar pentru a răspunde, el trebuie: 1) să producă (sau să evoce) un concept precis pentru ce înseamnă că un raționament este valid; și 2) să determine dacă acest raționament particular satisface acel concept. În al doilea rând, el se poate întreba: *Ce sunt propozițiile ce compun aceste raționamente și ce proprietăți au ele?* De pildă:

1) Ce genuri de lucruri sunt propozițiile precum „Steaua nu va câștiga campionatul de fotbal anul acesta” ori „Ion este un om de afaceri”? Sunt ele pur și simplu șiruri de cuvinte? Apoi, ce susține cineva atunci când pronunță o propoziție ca, să zicem, „Ion este om de afaceri”? Care sunt acele lucruri despre care noi suntem îndreptățiți să susținem că au o valoare de adevăr?

2) Există valori de adevăr? Iar dacă da, câte? În logica standard a propozițiilor se presupune că există două valori de adevăr – adevărul și falsul – și că orice propoziție are exact una din aceste valori de adevăr. Dar se întâmplă mereu așa? Adică, putem zice că o propoziție are mereu una din aceste valori de adevăr? Și, mai departe, e sigur că nu există decât două valori de adevăr?

3) Ce sunt conectivile logice la care se apelează în logica propozițiilor? Ce natură au ele? Trimit ele la ceva din lume, sau nu? Depinde valoarea de adevăr a propozițiilor compuse cu ajutorul lor numai de valorile de adevăr ale propozițiilor componente, sau intervin și alți factori?

4) În sfârșit, sunt redată în chip satisfăcător în logica propozițiilor raționamentele pe care le facem în limba naturală? Sau, altfel zis: reprezintă raționamentele formulate în diferitele limbaje ale logicii propozițiilor *formalizări* satisfăcătoare ale raționamentelor noastre de zi cu zi? De pildă: sunt formalizate corect propozițiile din limba naturală prin propozițiile limbajelor formale ale logicii propozițiilor? Și, sunt relațiile din limba naturală reprezentate corect prin conectivile logice ale logicii propozițiilor? Astfel: este „și” – conectivul logic numit „conjuncție” – o replică satisfăcătoare a lui „și” din limba naturală? (Gândiți-vă că în logica propozițiilor o propoziție ca p și q este echivalentă cu q și p ; dar se întâmplă tot așa și cu propozițiile: „Al doilea război mondial a început

în 1939 și s-a sfârșit în 1945", respectiv: „Al doilea război mondial s-a sfârșit în 1945 și a început în 1939”? Sau: este implicația logică o formalizare adecvată a relației „dacă ... atunci” din limba naturală? (În logica propozițiilor implicația: „Dacă luna este făcută din brânză verde, atunci $2 + 2 = 4$ ” e adevărată; dar este ea intuitiv adevărată?)

Probleme precum acestea intră în domeniul preocupărilor de *logică filosofică*. Logica filosofică este într-un fel logică, și este într-un fel filosofică. Este logică, pentru că studiază raționamentele, condițiile care le fac valide; și este filosofică, pentru că ea reprezintă o investigare de tip filosofic a mijloacelor folosite pentru a construi sistemele logice formale. Exemplele date cred că au reușit deja să delimiteze obiectul ei de studiu: ideile de adevăr, de înțeles, de referință, chestiunea formalizării raționamentelor din limba naturală (în vederea determinării structurii și validității lor logice) etc.

Logica filosofică nu este reflecția filosofică asupra logicii; o atare investigație e constituită de filosofia logicii. Este adevărat, unii autori consideră că cele două discipline sunt strâns legate, până la identificare: există lucrări zise de „filosofia logicii” care abordează chestiuni cum ar fi, de exemplu, cea a naturii propozițiilor și care țin de fapt de logica filosofică; după cum există lucrări zise de logică filosofică în care sunt cuprinse discuții despre chestiuni de filosofia logicii, cum ar fi cele privind semnificația filosofică a teoremelor de incompletitudine ori a teoremelor lui Löwenheim-Skolem. În aceste din urmă cazuri, reflecția filosofică privește *rezultatele* activității logice. Logica filosofică nu vizează însă rezultatele, ci instrumentele folosite pentru a produce acele rezultate; nu ceea ce se obține prin formalizarea într-un limbaj formal a unei colecții de raționamente, ci putința și natura formalizării acelor raționamente într-un limbaj formal de acel gen. Nu se preocupă de gustul mâncării, ci de natura și calitatea materialelor folosite pentru a face acea mâncare.

Capitolul IV al acestei lucrări este semnificativ în această privință. În el e discutată posibilitatea de a formaliza în logica de ordinul întâi propozițiile categorice, cele în care vorbim despre mai multe feluri de obiecte, ori cele propozițiile în care spunem că un obiect individual are o proprietate sau că există. Astfel se nasc întrebări fundamentale ce țin de domeniul logicii filosofice, precum: cât se păstrează din forma gramaticală a unei propoziții atunci când o traducem în, de pildă, un limbaj de ordinul întâi? Ce natură au cuantificatorii? (= expresii precum „toți” ori „unii”) Care e natura termenilor singulari? (= a acelor expresii pe care le folosim pentru a vorbi despre obiecte individuale) Este existența o proprietate a obiectelor? (Și, deci, când susținem că ceva există spunem ceva despre acel obiect?)

Când încercăm să răspundem la aceste întrebări, trebuie să presupunem anumite rezultate logice (și voi face referire la unele dintre teoremele probate în

capitolul III); preocuparea principală nu e însă acum aceea de a produce noi rezultate logice (în acest scop logicianul cu pregătire matematică este mult mai indicat; filosoful acum și-a încheiat munca), ci de a scruta posibilitatea de a aplica un sistem logic unor cazuri semnificative. (Desigur însă că astfel nu este de la bun început exclusă posibilitatea de a se obține rezultate tehnice interesante!) Să observăm, totodată, că acesta a fost unul dintre motivele pentru care am acordat un spațiu atât de larg (în capitolele I și III) prezentării metateoriei logicii elementare – a logicii propozițiilor și a logicii de ordinul întâi a predicatelor.

De asemenea, e important să remarcăm că discuții precum cele din capitolul IV ne conduc spre teme filosofice grave, precum ideea de universal, de individ, de existență etc. Logica filosofică este filosofie: e o reflecție conceptuală asupra unor idei precum cele menționate adineaori. Și – să accentuăm – nu există constrângeri a priori asupra tipului de reflecție filosofică cerută în domeniul logicii filosofice. Logica filosofică nu se află în întregime în parohia filosofilor logicii ori matematicii; nu e în parohia filosofilor de orientare analitică, nu e legată de filosofia limbajului mai mult decât, să zicem, de metafizică. Aici nu e presupus un tip de rezultate, ori un tip de unelte. Un singur lucru e cerut: rigoarea conceptuală.

C a p i t o l u l I

METATEORIA LOGICII PROPOZIȚIILOR

§ 1. Conective logice

În logica propozițiilor se folosesc două feluri de simboluri: conective logice și litere propoziționale. Conectivile logice cel mai des întrebuințate sunt negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența, în simboluri: $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Să luăm ca exemplu simbolul $\wedge$ (uneori, pentru conjuncție vom folosi de asemenea simbolul $\cdot$). Plecând de la două propoziții φ și ψ , el permite formarea unei noi propoziții, $(\varphi \wedge \psi)$. Pentru această nouă propoziție, e necesar să specificăm anumite proprietăți care să permită utilizarea ei în contextul logicii propozițiilor. Ceea ce trebuie cunoscut în acest context este valoarea ei de adevăr. Informația necesară în acest sens este dată prin următoarea definiție:

(1.1) $(\varphi \wedge \psi)$ este adevărată dacă și numai dacă φ este adevărată și ψ este adevărată; altminteri, ea este falsă.

În legătură cu definiția (1.1) trebuie făcute mai multe observații: mai întâi, în logică apare foarte des expresia „dacă și numai dacă”; pentru comoditate, aici și în cele ce urmează se va folosi prescurtarea „ddacă”. În al doilea rând, conținutul lui (1.1) este adesea redat cu ajutorul unui tabel de adevăr:

(1.2)	<table><tr><th>Φ</th><th>Ψ</th><th>$(\Phi \wedge \Psi)$</th></tr><tr><td>T</td><td>T</td><td>T</td></tr><tr><td>T</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>T</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	Φ	Ψ	$(\Phi \wedge \Psi)$	T	T	T	T	F	F	F	T	F	F	F	F
Φ	Ψ	$(\Phi \wedge \Psi)$														
T	T	T														
T	F	F														
F	T	F														
F	F	F														

unde T este o prescurtare pentru adevărat, iar F este o prescurtare pentru fals. Pentru celelalte conective logice – pentru disjuncție, respectiv implicație, echivalență și negație ($\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$) – se dau, de asemenea, tabelele corespunzătoare:

(1.3)	φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$	φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
	T	T	T	T	T	T
	T	F	T	T	F	F
	F	T	T	F	T	T
	F	F	F	F	F	T

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	φ	ψ	$(\neg \varphi)$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F			
F	F	T			

Pentru implicație, bunăoară, informația conținută în tabelul ei de adevăr poate fi exprimată cu ajutorul următoarei definiții de tipul lui (1.1):

(1.4) $(\varphi \rightarrow \psi)$ este adevărată dacă sau φ este falsă sau cel puțin ψ este adevărată; altminteri, $(\varphi \rightarrow \psi)$ este falsă.

Să mai observăm că, în genere, o propoziție poate fi adevărată într-o situație și falsă într-alta. De pildă, propoziția poate conține expresii precum „aici“, „acum“, „acesta“ care își schimbă referința în funcție de situație. Propoziția „Acum este senin“ e adevărată dacă e pronunțată în ziua de 26 februarie 1994, dar este falsă atunci când e pronunțată în multe alte zile. Pentru a se evita această dificultate, în logica propozițională se presupune că atunci când vorbim despre adevărul sau falsul unei propoziții, o anumită situație este fixată.

În definiția (1.1) apar cuvintele „adevărat“ și „fals“. E nevoie de câteva explicații privitoare și la felul în care sunt întrebuințate acestea în logica propozițională. O supoziție fundamentală este aceea că orice propoziție considerată este fie adevărată fie falsă, dar nu ambele. Desigur, se va putea obiecta că această presupunere nu este corectă; dar ea poate fi menținută fără dificultate odată ce vom fi de acord să acceptăm numai acele situații în care ea este îndeplinită. Pe de altă parte, apare problema înțelesului expresiei „fals“. Desigur că despre o propoziție putem spune în multe feluri că este falsă. Fie, de exemplu, propoziția: „Directorul a semnat acest act“. Putem spune că e falsă sau pentru că directorul, fiind plecat din oraș, nu a semnat actul; sau pentru că, îndoiindu-se că actul e întocmit corespunzător din punct de vedere juridic, directorul a refuzat să îl semneze; sau pentru că, funcția de director fiind vacantă, nu există o persoană care să semneze acel act etc. În logica propozițională nu se deosebește între aceste feluri de a fi falsă ale unei propoziții. „Este falsă“ înseamnă, pur și simplu, „nu este adevărată“.

Începând cu Frege, s-a argumentat de multe ori că atunci când folosim expresiile „adevărat“ și „fals“ noi presupunem că există două obiecte – adevărul și falsul – care sunt numite de propozițiile adevărate, respectiv false. O propoziție ca „Zăpada este albă“ este un nume pentru adevăr, și acesta este sensul în care zicem că ea este adevărată; propoziția „Iarba este albă“ este un nume pentru un obiect, falsul, și în acest sens zicem că ea este falsă. „Fiecare propoziție enunțată în care ne interesează semnificația cuvintelor trebuie să fie concepută drept un nume propriu, și atunci semnificația sa, dacă ea există, va fi adevărul sau falsul. Aceste două obiecte sunt acceptate de toți cei care judecă în genere, chiar și de un sceptic”¹. Problema naturii acestor două obiecte este extrem de importantă; însă pentru logica propozițiilor ea nu este relevantă. Adevărul și falsul ar putea la fel de bine să fie mâna mea dreaptă, respectiv mâna mea stângă, sau invers, ori Big Ben, respectiv Statuia Libertății, sau invers. De aceea, logicienii iau adevărul, în chip convențional, ca fiind numărul 1, iar falsul, tot în chip convențional, ca fiind numărul 0. Alegerea are însă avantaje tehnice; bunăoară – așa cum se poate vedea imediat cu ajutorul lui (1.2) – valoarea de adevăr a conjuncției poate fi calculată înmulțind valorile de adevăr ale celor două propoziții componente.

Uncori s-a susținut că propoziția $(\varphi \wedge \psi)$ înseamnă același lucru ca și

(1.5) φ și ψ

Aici „și” este o expresie a limbii române, care e folosită în cadrul acesteia pentru a exprima conjuncția. Desigur că înțelesurile celor două propoziții sunt foarte apropiate. Dar între ele există și diferențe notabile (să ne gândim numai la faptul că în limba română „și” înseamnă de multe ori: „și după aceea”). Simbolul $\wedge$ este un simbol al logicii propozițiilor, nu al unei limbi naturale (româna), iar înțelesul său e precizat în interiorul acesteia.

În sfârșit, expresia (1.1) poate fi luată în sensul că ea furnizează înțelesul simbolului $\wedge$. Dacă ar fi așa, atunci ar trebui ca (1.1) să fixeze un singur înțeles; or, se observă ușor că putem introduce un simbol $\wedge_1$, astfel încât $(\varphi \wedge_1 \psi)$ să însemne același lucru ca și propoziția.

(1.6) $(\varphi \wedge \psi) \wedge$ numărul π este irațional.

Propoziția $(\varphi \wedge_1 \psi)$ este adevărată în toate situațiile în care propoziția $(\varphi \wedge \psi)$ este adevărată, și este falsă în toate situațiile în care propoziția $(\varphi \wedge \psi)$ este falsă. Însă, evident, cele două propoziții nu au același înțeles. Obiecția, susținută, între alții, de Wittgenstein², nu se aplică totuși atunci când ne raportăm la orizontul logicii propozițiilor. Căci (1.1) – respectiv (1.2) – indică ce trebuie să avem în vedere pentru a determina dacă propoziția $(\varphi \wedge \psi)$ este adevărată. Să presupunem că cineva ar vrea să verifice adevărul lui $(\varphi \wedge \psi)$;

¹ G. Frege, *Sens și semnificație*, în *Logică și filosofie*, Editura Politică, București, 1966, p. 62.

² *Tractatus logico-philosophicus*, în special propozițiile 4.46 și 4.465.

definiția (1.1) spune că el va putea face acest lucru chiar dacă nu știe că numărul π este irațional, dar nu va reuși în încercarea sa dacă nu verifică ce valori de adevăr au propozițiile ϕ și ψ .

Trebuie, de asemenea, să facem următoarea distincție. Constantele logice sunt simboluri, precum $\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc. Pentru fiecare din aceste simboluri am folosit câte un nume – conjuncție, disjuncție, negație etc. Dar aceste simboluri sunt folosite ca nume pentru ceea ce se cheamă *funcții de adevăr*. Fie propozițiile p și q și simbolul $\wedge$. Construim expresia $(p \wedge q)$. Expresia $(p \wedge q)$ este un complex de semne, care stă pentru o propoziție: pentru conjuncția propozițiilor p și q . Cum am văzut, admitem că valoarea de adevăr a acestei noi propoziții este determinată univoc de: 1) valorile de adevăr ale propozițiilor componente; 2) proprietățile conjuncției. Conjuncția nu solicită să apelăm la nici o altă proprietate a propozițiilor componente în afara valorii lor de adevăr. În acest sens zicem: conjuncția este o funcție care din două propoziții produce o altă propoziție (pe care, pentru a nu complica lucrurile, o numim tot „conjuncția” celor două propoziții) și care e *de adevăr*; pe scurt, conjuncția este o *funcție de adevăr*. Atenție deci: *semnul* $\wedge$ este un conectiv logic, care *stă pentru* (numește; sau referă la) o *funcție de adevăr*.

Alături de conectivele logice, în logica propozițiilor se folosesc simboluri de un alt tip, anume litere propoziționale:

$$(1.7) p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$$

Combinându-le cu ajutorul conectivele logice, putem produce expresii mai complexe, numite formule. De pildă, plecând de la literele propoziționale p , q , r putem construi, pe rând, formulele

$$(1.8) \begin{aligned} &(p \vee q) \\ &((p \vee q) \rightarrow r) \\ &(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \end{aligned}$$

Literele propoziționale nu au un înțeles fixat; ele însele nu sunt propoziții, ci țin locul unor propoziții. Formulele (1.8) nu sunt propoziții, dar devin propoziții dacă p , q , r sunt înlocuite cu, de exemplu, propoziții ale limbii române. Astfel, dacă punem:

p : Ai fost înțepat de o viespe.

q : Ai fost înțepat de o albină.

r : Sarea aplicată pe rană alină durerea.

ultima formulă din (1.8) devine propoziția:

(1.9) (Ai fost înțepat de o viespe $\wedge$ ((ai fost înțepat de o viespe $\vee$ ai fost înțepat de o albină) $\rightarrow$ sarea aplicată pe rană alină durerea)).

De multe ori, în prezentarea logicii propoziționale, p , q , r sunt numite „variabile propoziționale”. Această procedură nu este corectă: admitând că p este o „variabilă”, se recunoaște că p nu este o propoziție, ci ține locul unei propoziții. Dar această condiție nu este suficientă pentru a afirma că p este o variabilă propozițională. Pentru a fi așa ceva, e necesară o a doua condiție: să putem cuantifica asupra propozițiilor, să putem, deci, ca din formula $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$ să putem conchide, de pildă, că

(1.10) Există un p astfel încât $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$ e adevărată.
Or, acest lucru nu este posibil; în logica propozițiilor nu este permisă cuantificarea asupra propozițiilor și, deci, (1.10) nu este o formulă a logicii propozițiilor. În logica propozițiilor nu putem spune, bunăoară, că:

(1.10.1) Tot ceea ce spune Epimenide cretanul este fals.
fiindcă în (1.10.1) se cuantifică asupra propozițiilor.

În paragraful anterior am folosit expresiile φ , ψ cu ajutorul cărora am formulat expresii ca $(\varphi \wedge \psi)$, $(\neg\varphi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ etc. Dacă folosim și expresia χ , putem produce analogi ai formulelor (1.8):

$$\begin{aligned} (1.11) \quad & (\varphi \vee \psi) \\ & ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi) \\ & \neg (\varphi \wedge ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)) \end{aligned}$$

Literele propoziționale p , q , r diferă de φ , ψ , χ în sensul următor: cele din urmă sunt *metavariabile propoziționale*. Metavariabilele nu sunt propoziții. Ele sunt parte a metalimbajului, adică a limbajului pe care îl folosim pentru a vorbi *despre* formule și *despre* propoziții obținute din acestea prin înlocuirea literelor propoziționale cu propoziții. Așadar, metavariabile propoziționale sunt nume atât pentru formulele propoziționale, cât și pentru propoziții (În metalimbaj vom face următoarea convenție: simbolurile pentru conectivele logice vor fi folosite ca nume ale lor însele. Astfel, fie expresia: $(\varphi \vee \psi)$; simbolul „ $\vee$ ” e folosit în metalimbaj ca nume pentru disjuncția $\vee$ din logica propozițiilor).

De exemplu, dacă φ este un nume în metalimbaj pentru p , ψ – pentru q , iar χ – pentru r , atunci metaexpresia $(\varphi \wedge ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)$ este un nume pentru expresia $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$ a logicii propozițiilor; iar dacă φ , ψ și χ stau pentru propoziții concrete, atunci e posibil ca aceeași metaexpresie să fie un nume pentru (1.9). Spre deosebire de literelor propoziționale p , q , r ..., simbolurile φ , ψ , χ ... sunt *metavariabile*. Aceasta înseamnă că în metalimbaj putem cuantifica asupra lor, deci pot fi folosite pentru a face enunțuri de felul:

(1.12) Oricare ar fi propoziția φ , dacă φ este spusă de Epimenide, atunci este falsă.

Fie acum φ o formulă. O *instanță* a lui φ este o propoziție pe care o obținem din φ înlocuind fiecare literă propozițională din φ o propoziție dintr-un limbaj, de exemplu din limba română, ținând seama ca nici o literă propozițională să nu fie înlocuită, în aparițiile sale diferite ale sale, cu propoziții diferite. Dacă știm valorile de adevăr ale acestor propoziții într-o instanță a lui φ , atunci putem să formăm un tabel de adevăr, cu ajutorul lui (1.2) și (1.3), pentru a afla valoarea de adevăr a întregii instanțe.

Să presupunem că o instanță a lui φ este (1.9); să notăm, pentru simplitate, cele trei propoziții ce apar în această instanță cu p , q și r , în felul în care am procedat mai devreme; vom avea atunci $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$.

Obținem următorul tabel de adevăr:

(1.13)	p	q	r	$(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$					
(i)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(ii)	1	1	0	1	0	1	1	1	0
(iii)	1	0	1	1	1	1	1	0	1
(iv)	1	0	0	1	0	1	1	0	0
(v)	0	1	1	0	0	0	1	1	1
(vi)	0	1	0	0	0	0	1	1	0
(vii)	0	0	1	0	0	0	0	0	1
(viii)	0	0	0	0	0	0	0	0	1
				1	7	2	5	3	6

Liniiile (i) – (viii) din stânga înșiră toate felurile posibile în care propozițiile p , q și r pot avea valorile de adevăr. Coloanele din dreapta sunt calculate în ordinea arătată de numerele de la 1 la 7: mai întâi se repetă coloanele lui p (de două ori), q și r , apoi se calculează în ordine valorile de adevăr pentru $(p \vee q)$, $((p \vee q) \rightarrow r)$ și, în sfârșit, pentru întreaga expresie.

Cu ajutorul tabelor de adevăr putem demonstra validitatea – în logica propozițiilor – a unui raționament. De pildă, fie:

(1.14) Aceea a fost o viespe, iar sarea alină durerea provocată de înțepăturilor de viespe sau de albină. Așa că ar fi bine să-ți pui niște sare pe înțepătură.

În (1.14) e conținut un raționament, anume:

(1.15) (Ai fost înțepat de o viespe $\wedge$ ((ai fost înțepat de o viespe $\vee$ ai fost înțepat de o albină) $\rightarrow$ sarea aplicată pe rană alină durerea)

Deci: Sarea aplicată pe rană îți va alina durerea.

Înlocuind propozițiile componente după procedura folosită mai sus, obținem:

(1.16) $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$. *Deci:* r

Acum, să calculăm tabelele de adevăr pentru premisa și concluzia lui (1.16). Cu ajutorul lui (1.13), obținem:

(1.17)	p	q	r	$(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$	r
(i)	1	1	1	1	1
(ii)	1	1	0	0	0
(iii)	1	0	1	1	1
(iv)	1	0	0	0	0
(v)	0	1	1	0	1
(vi)	0	1	0	0	0
(vii)	0	0	1	0	1
(viii)	0	0	0	0	0

Observăm că ori de câte ori premisa e adevărată (liniile (i) și (iii)), și concluzia e adevărată. Așadar, nu există nici o linie în care premisa să fie adevărată, iar concluzia falsă. Raționamentul este, deci, *valid*.

În acest paragraf s-a presupus că următoarea susținere este corectă:

(1.18) Dacă ϕ este o formulă a logicii propozițiilor, atunci orice atribuire de valori de adevăr pentru literele propoziționale care apar ϕ poate fi extinsă, cu ajutorul definițiilor (1.2) și (1.3) ale funcțiilor de adevăr, astfel încât să obținem valoarea de adevăr a lui ϕ ; această valoare de adevăr atribuită lui ϕ este unică și poate fi calculată într-un mod mecanic.

Susținerea (1.18) este teza centrală a logicii propozițiilor. Mai devreme am văzut cum funcționează aceasta pe un exemplu concret: cum, pomind de la valori de adevăr pentru p , q și r (liniile (i)–(viii) în (1.13)), calculăm valorile de adevăr pentru formule mai complexe, precum $(p \vee q)$, $((p \vee q) \rightarrow r)$ sau $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$. Dar acest exemplu reușit nu ne spune dacă, în chip necesar:

a) procedura urmată pentru a calcula valorile de adevăr pentru propozițiile mai complexe funcționează întotdeauna;

b) valorile de adevăr pe care le calculăm sunt unic determinate de tabelele de adevăr.

Intuitiv, tezele exprimate de (a) și (b) sunt corecte; dar este nevoie să dovedim că este așa. Modul în care se poate face acest lucru e următorul: să observăm mai întâi că formulele sunt mai mult sau mai puțin complexe. Ideea este aceea de a arăta că, dacă (1.18) este valabilă pentru formule mai simple, atunci va fi valabilă și pentru formulele construite din acestea cu ajutorul conectivelor logice. Principiul care va fi folosit în demonstrație este cel al *inducției matematice*. El are forma:

(1.19) Să presupunem că numărul 0 are a anumită proprietate; să presupunem de asemenea că ori de câte ori numerele de la 0 la n inclusiv au acea proprietate, și numărul $n + 1$ o are. Atunci se poate conchide că toate numerele naturale au acea proprietate.

Dificultatea constă în a face aplicabil acest principiu al inducției matematice în cazul nostru. Procedura va consta în următoarele: fiecărei formule a logicii propozițiilor i se va atribui un număr natural unic determinat (egal sau mai mare cu 0). Apoi se va arăta că susținerea (1.18) e adevărată pentru toate formulele cărora li s-a atribuit numărul 0. De asemenea, se va arăta că dacă susținerea (1.18) se aplică tuturor formulelor care au un număr mai mic sau egal cu n , atunci se va aplica obligatoriu și formulelor care au numărul $n + 1$. De unde vom putea conchide că (1.18) se aplică tuturor formulelor.

Pentru aceasta, e nevoie însă de introducerea într-un mod riguros a noțiunii de formulă.

§ 2. Limbajul formal al logicii propozițiilor

Am definit o instanță a lui ϕ ca o propoziție pe care o obținem înlocuind fiecare literă propozițională care apare în ϕ cu o propoziție dintr-un limbaj; exemplul dat a fost cel al propozițiilor din limba română. Este acum momentul să precizăm într-un mod mai abstract acest lucru.

Fie S o mulțime de propoziții. S e o mulțime oarecare de propoziții; ceea ce se cere este doar ca ea să fie fixată, adică să fi fie determinate elementele (= propozițiile pe care le conține). Acum vom defini limbajul propozițional $L(S)$ construit din propozițiile din S .

Simbolurile lui $L(S)$ sunt următoarele:

- (2.1) a) toate propozițiile din S ;
- b) conectivele logice: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- c) parantezele: $(,)$.

Intuitiv, elementele lui S stau pentru afirmații simple, iar conectivele logice, pentru cuvintele folosite pentru a combina afirmațiile simple în altele complexe. Urmează acum să definim propozițiile lui $L(S)$, pe scurt: propozițiile.

(2.2) Definiția *propozițiilor*:

- a) dacă ϕ este un element al lui S , atunci ϕ este o propoziție;
- b) dacă ϕ este o propoziție, atunci $(\neg \phi)$ este o propoziție;
- c) dacă ϕ și ψ sunt propoziții, atunci $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ și $(\phi \leftrightarrow \psi)$ sunt propoziții;
- d) un șir finit de simboluri ale lui $L(S)$ este o propoziție dacă și numai dacă se poate arăta că este o propoziție aplicând de un număr finit de ori punctele (a) – (c).

Într-un mod puțin mai complicat, noțiunea de propoziție a lui $L(S)$ poate fi construită simultan cu noțiunea de complexitate a unei propoziții a lui $L(S)$, astfel:

- (2.3) a) Dacă ϕ este un element al lui S , atunci ϕ este o propoziție și are complexitatea 0;
- b) dacă ϕ este o propoziție și are complexitatea n , atunci $(\neg \phi)$ este o propoziție și are complexitatea $n + 1$;
- c) dacă ϕ și ψ sunt propoziții și au complexitatea n , respectiv m , atunci $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ și $(\phi \leftrightarrow \psi)$ sunt propoziții și au complexitatea $n + m + 1$;
- d) la fel ca la (2.2).

De pildă, fie p și q elemente ale lui S . Atunci:

p și q sunt propoziții și au complexitatea 0;

$(\neg p)$ este o propoziție de complexitatea $0 + 1 = 1$;

$(p \vee q)$ este o propoziție și are complexitatea $0 + 0 + 1 = 1$;

$((\neg p) \vee q)$ este o propoziție și are complexitatea $1 + 0 + 1 = 2$ etc.

Vom enunța, fără demonstrație, câteva leme:

(2.4) Dacă ϕ este o propoziție, atunci numărul de apariții ale lui "(" în ϕ este egal cu numărul de apariții ale lui ")" în ϕ .

(2.5) Dacă ϕ este o propoziție, atunci în ea există un singur conectiv logic principal, care are proprietatea că dacă la stânga lui simbolul ")" apare de n ori, atunci simbolul "(" apare la stânga lui de $n + 1$ ori.

(2.6) Dacă ϕ are complexitatea n și $n \neq m$, atunci ϕ nu are complexitatea m .

Acum putem reveni la susținerea (1.18). Să o demonstrăm prin inducție. Fie o formulă ϕ . Dacă ea are complexitatea 0, atunci este un element din S , iar atribuirile de valori de adevăr pentru ϕ se fac în mod automat în tabelele de adevăr. Spre exemplu, dacă ϕ este p din tabelul (1.13), atribuirile de adevăr pentru p (coloanele 1 și 2) sunt obținute prin simpla recopiere a primei coloane din stânga tabelului. Să presupunem acum că $n > 0$. Atunci, conform cu (2.6), formula ϕ are o complexitate unic determinată n și, dacă $m \neq n$, atunci ϕ nu are complexitatea m . Potrivit lui (2.5), putem determina conectivul logic principal din ϕ . Fără a pierde generalitatea, să presupunem că acesta este $\vee$. Atunci ϕ este o propoziție $(\phi_1 \vee \phi_2)$. La rândul lor, ϕ_1 și ϕ_2 au complexități bine determinate m_1 și m_2 și potrivit lui (2.3), punctul (c), $n = m_1 + m_2 + 1$. De aici rezultă imediat că

$$m_1 < n.$$

$$m_2 < n.$$

Potrivit pasului inductiv, susținerea (1.18) este adevărată pentru orice propoziție care are o complexitate mai mică decât n ; așadar, pentru ϕ_1 și pentru ϕ_2 am calculat deja cu ajutorul tabelelor de adevăr, pentru fiecare atribuire de valori de adevăr pentru elementele lui S care apar în ϕ , o valoare de adevăr bine determinată. Făcând apel la tabelul (1.3), obținem și pentru ϕ o valoare de adevăr bine determinată. La fel se procedează când în ϕ conectivul logic principal este negația, conjuncția, implicația sau echivalența. Aplicând principiul inducției matematice (1.19), rezultă că (1.18) este adevărată pentru orice formulă a lui $L(S)$.

§ 3. Validitate și tautologie

În paragrafele anterioare au fost introduse noțiunile preliminare în vederea formulării *teoriei modelelor* pentru logica propozițiilor.

Teoria modelelor este aceea ramură a logicii matematice care se ocupă cu relația dintre limbajele formale și interpretările acestora: *modelele*. Este o ramură relativ nouă a logicii, care a înflorit în special din anii '50 (numele însuși al acestui gen de preocupări logice a fost avansat în 1954 de A. Tarski), chiar dacă unele rezultate (în principal teoremele lui Löwenheim și Skolem) au fost obținute mai devreme. Teoria modelelor studiază raporturile dintre noțiuni *sintactice* și noțiuni *semantice*. Sintaxa privește structura pur formală a limbajului. Noțiuni sintactice sunt, de pildă, cea de propoziție, cea de complexitate a unei propoziții etc. În cele ce urmează vor fi definite și studiate și alte noțiuni sintactice: cele de demonstrație, teoremă, tautologie etc. Semantica privește interpretarea sau înțelesul unui sistem formal. Noțiunile semantice deja amintite sunt cele de adevăr și de fals, tabelele de adevăr. În continuare vor fi introduse și studiate și alte noțiuni semantice, precum cele de validitate, consecință etc.

Pentru a construi o teorie a modelelor, trebuie pornit de la un limbaj formal. Limbajul $L(S)$ este un bun exemplu pentru a introduce ideile de bază ale teoriei modelelor, chiar dacă el este extrem de simplu. Puntea dintre un limbaj formal și interpretările sale este furnizată de *definițiile de adevăr*, care specifică valoarea de adevăr a fiecărei propoziții, în fiecare model.

Ce este un model al logicii propoziționale? Ce este, deci, o interpretare a logicii propozițiilor? Primul răspuns care vine în minte este acesta: o interpretare, deci un model al logicii propozițiilor, este o funcție care atașează fiecărei propoziții din S o valoare de adevăr: adevărul sau falsul. Putem modifica puțin această intuiție, în felul următor: pentru a construi modelul M , fiecărei propoziții din S i se va atașa o valoare de adevăr. Să definim atunci pe M ca fiind mulțimea acelor propoziții din S cărora li se atașează valoarea de adevăr adevărul. Acum, evident, dacă o propoziție din S nu aparține mulțimii M , știm că în acest model valoarea de adevăr care i s-a atașat este falsul.

(3.1) Un model M pentru $L(S)$ este o submulțime M a lui S . Dacă, de pildă, S este o mulțime finită și are n elemente, atunci vor exista 2^n submulțimi ale lui S și deci 2^n modele ale lui $L(S)$. Între acestea, vor exista și modelele $M = \emptyset$, când în M nu e adevărată nici o propoziție din S , și $M = S$, când toate propozițiile din S sunt adevărate în M .

Un model este deci o *situație* în care sunt adevărate unele propoziții din S . Am putea spune chiar că un model este o stare posibilă a lumii în care ar fi adevărate unele din propozițiile din S .

Putem acum să începem construirea punții dintre limbajul $L(S)$ și modelele sale. Primul pas e acela de a da o definiție a *adevărului* unei propoziții într-un model. Vom exprima faptul că o propoziție φ este adevărată în modelul M prin notația

$$M \models \varphi$$

Relația $M \models \varphi$ este definită astfel:

(3.2) Definiția adevărului unei propoziții φ în modelul M :

- a) dacă φ este un simbol propozițional din S , atunci $M \models \varphi$ ddacă $\varphi \in M$;
- b) dacă φ este o propoziție $(\neg \psi)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă nu este cazul că $M \models \psi$;
- c) dacă φ este o propoziție $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă $M \models \varphi_1$ și $M \models \varphi_2$;
- d) dacă φ este o propoziție $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă $M \models \varphi_1$ sau cel puțin $M \models \varphi_2$;
- e) dacă φ este o propoziție $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă sau nu este cazul că $M \models \varphi_1$ sau e cazul că $M \models \varphi_2$;
- f) dacă φ este o propoziție $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă: $M \models \varphi_1$ ddacă $M \models \varphi_2$.

Atunci când $M \models \varphi$, spunem că φ este *adevărată* în M , sau că φ *are loc* în M , sau că M *este un model al* lui φ ; când nu e cazul că $M \models \varphi$, spunem că φ este *falsă* în M , sau că φ *nu are loc* în M , sau că M *nu este un model al* lui φ . Se observă imediat, pe baza lui (b), că φ este falsă în M ddacă $(\neg \varphi)$ este adevărată în M , în simboluri $M \models (\neg \varphi)$.

Un gen special de propoziții e constituit de cele *valide*. O propoziție este validă, în simboluri.

$$\models \varphi$$

ddacă φ este adevărată în toate modelele. Alte noțiuni semantice, înrudite cu cea de validitate, sînt următoarele:

a) o propoziție este realizabilă ddacă există un model în care ea este adevărată;

b) o propoziție este nerealizabilă ddacă negația sa este validă.

Pentru a determina dacă o propoziție φ este validă, e necesar deci să se inspecteze toate modelele lui $L(S)$; iar dacă S este o mulțime infinită, acestea sunt infinite ca număr. Decurge de aici că determinarea validității lui φ nu se poate realiza printr-un test simplu, desfășurat întotdeauna printr-un număr

finit de pași. Din fericire însă, așa cum vom vedea, aplicând o strategie indirectă, se poate determina într-un număr finit de pași dacă o propoziție φ este validă sau nu.

Să observăm, în acest sens, că dacă facem apel la noțiuni sintactice, nu semantice, putem determina precis, printr-un număr finit de pași, dacă o propoziție este validă. Procedura de decizie sintactică se bazează pe noțiunea de *tautologie*. Vom defini aici tautologia în termeni sintactici, deci prin raportare strict la limbajul formal $L(S)$, fără a face apel la noțiuni semantice (model, adevăr, validitate etc.). Atenție, de multe ori expresia „tautologie” e folosită într-un sens semantic: este tautologie o formulă care are valoarea de adevăr adevărul în orice linie a tabelului de adevăr pe care i-l construim. Dar în această lucrare expresia va fi folosită consecvent într-un sens sintactic.

Fie φ o propoziție în care apar $n + 1$ ($n > 0$) simboluri din S . Să le notăm cu $p_0, \dots, p_n$. Fie acum $a_0, \dots, a_n$ un șir format din două litere, t și f . Cititorul tentat să ia pe t ca însemnând adevărul iar pe f ca însemnând falsul – tentat, deci, să considere că, pe ascuns, am introdus în discuție noțiuni semantice – va putea să accepte următoarea convenție: t este un nume pentru paranteza ($,$ iar f este un nume pentru paranteza $)$. Convenția accentuează că alegerea celor două litere nu are nici o semnificație specială. Vom numi *atribuire* orice șir de forma $a_0, \dots, a_n$. Acum să definim noțiunea de *valoare* a unei propoziții φ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$:

(3.3) a) Dacă φ este o propoziție p_m din S și $m \leq n$, atunci valoarea lui φ este a_m ;

b) dacă φ este $(\neg \psi)$, atunci valoarea lui φ este opusul valorii lui ψ (opusul lui t este f , iar opusul lui f este t);

c) dacă φ este $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, atunci valoarea lui φ este t dacă valorile lui φ_1 și φ_2 sunt ambele t ; altminteri, valoarea lui φ este f .

Nu vom mai formula în continuare condițiile pentru celelalte funcții de adevăr; cititorul le poate construi singur, ca exercițiu.

Să observăm cât de asemănătoare sunt definițiile (3.3) și (3.2). Dar ele diferă în chip esențial, și anume în două locuri:

- 1) (3.2) este semantică, (3.3) este sintactică;
- 2) în timp ce (3.2) implică un model posibil infinit, când S este infinită, (3.3) implică doar o atribuire finită $a_0, \dots, a_n$.

Sintactic, noțiunea corespunzătoare celei semantice de validitate este noțiunea de *tautologie*. Fie φ o propoziție, iar $p_0, \dots, p_n$ toate simbolurile din S care apar în φ . Spunem că φ este tautologie, în simboluri

$\vdash \varphi$
dacă φ are valoarea t pentru orice atribuire $a_0, \dots, a_n$ de $n + 1$ litere t și f .

Valoarea lui φ pentru o atribuire $a_0, \dots, a_n$ poate fi calculată foarte ușor, cu ajutorul tabelor de adevăr definite în §1. Să accentuăm însă iarăși că, în folosirea acestora, aici *nu* se presupune că avem a face cu *interpretări* ale

propozițiilor ce apar în φ , cu atașarea unor valori de adevăr pentru acestea. Aici nu avem a face decât cu funcții care atașează fiecărei propoziții simple o valoare t sau f – dar fără să dăm vreun înțeles acestor valori – și cu extinderea, conform principiului (1.18) – iarăși neînțeles semantic, ca implicând deci noțiunea de adevăr – a acestor funcții la orice propoziție ψ a lui $L(S)$.

(3.4) Dacă toate propozițiile din S care apar în φ se află printre $p_0, \dots, p_n$, atunci valoarea lui φ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n, \dots, a_{n+m}$ este aceeași cu valoarea lui φ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$.

Analog lui (1.18), expresia (3.4) evidențiază că valoarea lui φ depinde doar de propozițiile lui S care efectiv apar în φ , nu și de celelalte propoziții din S care nu concură în compunerea lui cu ajutorul conectivelor logice.

Mai sus s-a afirmat că noțiunea sintactică de tautologie corespunde celei semantice de validitate. Sensul acestei „corespondențe” este dat de următoarele două teoreme:

(3.5) *Teorema de corectitudine.* Dacă φ este o tautologie, atunci φ este validă. În simboluri: dacă $\vdash \varphi$, atunci $\models \varphi$.

(3.6) *Teorema de completitudine.* Dacă φ este valabilă, atunci φ este o tautologie. În simboluri: dacă $\models \varphi$, atunci $\vdash \varphi$.

Cele două teoreme sunt puse uneori împreună sub numele de *teorema de completitudine* – teza că

(3.7) $\models \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$.

În cuvinte: φ este validă ddacă este tautologie.

Teorema (3.7) evidențiază cu limpezime sensul corespondenței între cele două noțiuni, una sintactică și una semantică: ambele definesc aceeași mulțime de propoziții.

Un corolar al teoremei (3.7) este următorul: întrucât putem decide pentru orice propoziție φ , cu ajutorul lui (3.3), dacă ea este sau nu tautologie într-un număr finit de pași, înseamnă că – potrivit acum teoremei de completitudine – putem decide într-un număr finit de pași dacă ea este validă.

Pentru a demonstra teoremele (3.5) și (3.6), deci teorema de completitudine (3.7), avem nevoie de o lemnă ajutătoare. Fie φ o propoziție, și fie toate propozițiile din S care apar în φ printre $p_0, \dots, p_n$. Să luăm un model oarecare M al lui $L(S)$. M este, desigur, o submulțime a lui S . Acum, pentru $m = 0, 1, \dots, n$, să punem $a_m = t$ dacă $p_m \in M$ și $a_m = f$ dacă $p_m \notin M$. Plecând de la un oarecare model M , obținem astfel o atribuire $a_0, \dots, a_n$. Prin inducție, e ușor să se arate că

(3.8) $M \models \varphi$ ddacă valoarea lui φ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$ este t .

Demonstrația acestei leme se face prin inducție:

a) dacă ϕ este un simbol din S , atunci (3.8) are loc, potrivit definiției atribuirii $a_0, \dots, a_n$;

b) dacă ϕ este $(\neg \psi)$, atunci prin inducție $M \models \psi$ dacă valoarea lui ψ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$ este t , sau, echivalent, $M \models \psi$ nu are loc dacă valoarea lui ψ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$ este f . Ținând cont de definiția lui M , avem: nu este cazul că $M \models \psi$ dacă $M \models (\neg \psi)$. Pe de altă parte, valoarea lui ψ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$ este f dacă valoarea lui $(\neg \psi)$ pentru atribuirea lui $a_0, \dots, a_n$ este t . Cu aceasta, (3.8) e demonstrat pentru cazul (b). Celelalte cazuri sunt lăsate ca exercițiu.

Acum putem trece la demonstrarea teoremei de completitudine.

Demonstrația lui (3.5). Să presupunem că ϕ este o tautologie. Atunci, pentru orice atribuire $a_0, \dots, a_n$, valoarea lui ϕ este t . Să presupunem că ϕ nu este validă. Atunci există un model astfel încât ϕ este falsă în M , deci relația $M \models \phi$ nu are loc. Conform definiției modelului, $(\neg \phi)$ este adevărată în M , în simboluri $M \models (\neg \phi)$. Însă în $(\neg \phi)$ apar aceleași simboluri din S care apar și în ϕ , deci acestea se găsesc printre $p_0, \dots, p_n$. Așadar, orice șir $a_0, \dots, a_n$ este o atribuire pentru care $(\neg \phi)$ are o valoare. Potrivit procedurii indicate mai sus, plecând de la modelul M obținem o atribuire $a_0, \dots, a_n$ astfel încât valoarea lui $(\neg \phi)$ este t și, deci, valoarea lui ϕ este f . Dar această atribuire $a_0, \dots, a_n$ este, în același timp, o atribuire pentru ϕ . Conform supoziției făcute, valoarea lui ϕ pentru orice atribuire este t – ceea ce contrazice însă rezultatul obținut. Așadar, ϕ este validă.

Demonstrația lui (3.6). Să presupunem că ϕ este validă. Atunci, oricare ar fi modelul M al lui $L(S)$, $M \models \phi$. Dacă ϕ nu este o tautologie, înseamnă că există o atribuire $a_0, \dots, a_n$ pentru care valoarea lui ϕ este f . Dar orice atribuire e obținută dintr-un model M și atunci, conform lui (3.8), nu este cazul că $M \models \phi$, ceea ce produce o contradicție. Așadar, ϕ este tautologie.

§ 4. Consecință și deducție

În acest paragraf vom introduce două noi noțiuni care își corespund: cea sintactică de *deducție* și cea semantică de *consecință*. Ambele reprezintă precizări ale relației informale:

ϕ implică logic ψ .

Să începem cu noțiunea de deducție. Ea se bazează pe posibilitatea de a distinge, dintre propozițiile lui $L(S)$, o clasă a tautologiilor. În paragraful anterior am prezentat o metodă – cea care face apel la noțiunea de valoare a unei propoziții pentru o atribuire – de a stabili când o propoziție este tautologie. Există însă

și alte metode de a selecta tautologiile. Pe scurt, vom menționa două: metoda lui Hilbert și metoda lui Gentzen.

a) *Metoda lui Hilbert.* Aceasta constă în alegerea unei mulțimi de propoziții Σ ale lui $L(S)$, numite *axiome*, împreună cu *reguli de derivare* a unor noi formule. Tautologiile vor fi axiomele și toate propozițiile care pot fi obținute din axiome, aplicând de un număr finit de ori regulile de derivare. Cu titlu de exemplu, prezentăm aici un sistem axiomatic. Acesta este o pereche (Σ, R) , unde Σ este mulțimea formată din următoarele 13 formule:

- (4.1.1.) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
- (4.1.2.) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)))$
- (4.1.3.) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)$
- (4.1.4.) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi)$
- (4.1.5.) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi))))$
- (4.1.6.) $(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$
- (4.1.7.) $(\varphi \rightarrow (\psi \vee \varphi))$
- (4.1.8.) $((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)))$
- (4.1.9.) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\neg \psi)) \rightarrow (\neg \varphi)))$
- (4.1.10.) $((\neg (\neg \varphi)) \rightarrow \varphi)$
- (4.1.11.) $((\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$
- (4.1.12.) $((\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
- (4.1.13.) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)))$

iar R este următoarea regulă de derivare (*modus ponens* sau *regula detașării*):

(4.2) Dacă φ și $(\varphi \rightarrow \psi)$ sunt tautologii, atunci și ψ este o tautologie.

Aici trebuie făcută următoarea observație: în mod obișnuit se formulează și o a doua regulă de derivare, regula substituției. Bunăoară, axioma (4.1.1) este dată sub forma

$$(4.1.1') (p \rightarrow (q \rightarrow p))$$

iar regula substituției permite să înlocuim în mod uniform fiecare literă propozițională care apare în (4.1.1') – p și q – cu orice propoziție. Astfel, din (4.1.1') se pot obține drept tautologii, prin regula substituției, propoziții precum:

- (i) $((p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$
- (ii) $(p \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$
- (iii) $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$ etc.

În felul în care am formulat axiomele sistemului, nu e nevoie de regula substituției; aceasta, datorită folosirii metavariabilelor. Într-adevăr în (4.1.1.) ϕ poate sta pentru $(p \wedge q)$, iar ψ pentru q (ca în (i)), sau ϕ poate sta pentru p , iar ψ pentru $(p \wedge q)$ (ca în (ii)) etc.

Iată un exemplu de tautologie care poate fi demonstrată în sistemul (Σ, R) :

$$(4.3) (\phi \rightarrow \phi)$$

Să observăm că următoarele propoziții sunt axiome:

1. $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$ (axioma (4.1.1))
2. $(\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi))$ (axioma (4.1.1))
3. $((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)))$ (axioma (4.1.2))

De aici obținem ușor:

4. $((\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$ (din (1) și (3), prin regula (4.2)).
5. $(\phi \rightarrow \phi)$ (din (2) și (4), prin regula (4.2))

Metoda lui Hilbert este inefficientă și neintuitivă; o cantitate mare de efort trebuie depusă pentru a produce ca tautologii propoziții foarte simple, bunăoară $(\phi \vee (\neg \phi))$ ori $(\phi \leftrightarrow (\neg(\neg \phi)))$. În plus, trebuie dovedit că mulțimea propozițiilor care pot fi demonstrate într-un sistem ca (Σ, R) este *exact* mulțimea propozițiilor care sunt tautologii potrivit procedurii descrise în paragraful anterior. Iar demonstrația acestui fapt este extrem de dificilă. Metoda lui Hilbert are însă cel puțin două merite importante: în primul rând, sistemele axiomatice definite fac apel la mecanisme extrem de simple de derivare a unei propoziții din altele; ca în cazul nostru, uneori numai o singură regulă de derivare apare ca necesară (cel mai adesea e vorba de modus ponens). În al doilea rând, metoda lui Hilbert permite să se observe ușor ce se întâmplă dacă unele dintre axiome sunt întărite, slăbite ori chiar eliminate. Acest fapt este extrem de folositor când se construiesc logici neclasice, de pildă logici polivalente sau logici ale implicației stricte.

În paragraful anterior am definit relația $\vdash$; $\vdash \phi$ înseamnă că ϕ este (potrivit metodei valorii de adevăr a propozițiilor pentru o atribuire) o tautologie. Să ne amintim că Σ e mulțimea axiomelor (4.1.1) – (4.1.13); să notăm cu $\Sigma \vdash_R \phi$ relația: propoziția ϕ este derivabilă din Σ cu ajutorul regulii R . Rezultatul amintit mai sus privitor la metoda lui Hilbert e următorul:

$$(4.4) \vdash \phi \text{ dacă } \Sigma \vdash_R \phi.$$

Relația $\Sigma \vdash_R \phi$ presupune deci două elemente: o mulțime de propoziții (luate ca premise ale demonstrației) și un set de reguli – în cazul nostru, singura regulă este modus ponens – cu ajutorul cărora pot fi derivate alte propoziții din premisele date.

b) *Metoda lui Gentzen*. Ea constă în a formula o mulțime R de reguli care să ne asigure obținerea tuturor tautologiilor, în sensul următor: să scriem $\vdash_R \varphi$ – în cuvinte: φ , este deductibilă – pentru cazul în care $\Gamma \vdash_R \varphi$ și $\Gamma = \emptyset$, deci când mulțimea premiselor de la care se pleacă pentru a obține φ este mulțimea vidă. Problema devine deci următoarea: să se construiască R astfel încât

(4.5) φ este tautologie (simbolic, $\vdash \varphi$) ddacă $\vdash_R \varphi$.

În stilul lui Gentzen pot fi produse diverse astfel de mulțimi R de reguli de derivare. Un exemplu este următorul (aici se dau reguli pentru fiecare funcție de adevăr: mai întâi unele de *introducere* a funcției, apoi unele de *eliminare* a funcției; natura regulilor va fi marcată prin litera i , respectiv e , atașată numărului regulii):

(4.6.1.i) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash_R \psi$, atunci $\Gamma \vdash_R (\varphi \rightarrow \psi)$

(4.6.1.e) Dacă $\Gamma \vdash_R \varphi$ și $\Gamma \vdash_R (\varphi \rightarrow \psi)$, atunci $\Gamma \vdash_R \psi$.

(4.6.2.i) $\Gamma, \varphi, \psi \vdash_R (\varphi \wedge \psi)$

(4.6.2.e) a) $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash_R \varphi$

b) $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash_R \psi$

(4.6.3.i) a) $\Gamma, \varphi \vdash_R (\varphi \vee \psi)$

b) $\Gamma, \psi \vdash_R (\varphi \vee \psi)$

(4.6.3.e) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash_R \psi$ și $\Gamma, \chi \vdash_R \psi$ și $\Gamma \vdash_R (\varphi \vee \chi)$, atunci $\Gamma \vdash_R \psi$.

(4.6.4.i) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash_R \psi$ și $\Gamma, \varphi \vdash_R (\neg \psi)$, atunci $\Gamma \vdash_R (\neg \varphi)$

(4.6.4.e) a) $\Gamma, (\neg (\neg \varphi)) \vdash_R \varphi$

b) $\Gamma, \varphi, (\neg \varphi) \vdash_R \psi$

(4.6.5.i) $\Gamma, (\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi) \vdash_R (\varphi \leftrightarrow \psi)$

(4.6.5.e) a) $\Gamma, (\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_R (\varphi \rightarrow \psi)$

b) $\Gamma, (\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_R (\psi \rightarrow \varphi)$

(4.6.6) Dacă $\Gamma \vdash_R \varphi$, atunci $\Gamma, \Delta \vdash_R \varphi$ pentru orice mulțime Δ de propoziții ale lui $L(S)$.

Ca și în cazul metodei lui Hilbert, să vedem cum pot fi utilizate aceste reguli pentru a produce tautologii. Cum în continuare e presupus că ne raportăm la mulțimea R de reguli formulată mai sus, vom scrie simplu $\Gamma \vdash \varphi$ în loc de $\Gamma \vdash_R \varphi$. Să demonstrăm:

(4.7.) $\vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$

Mai întâi, vom demonstra lema:

(4.7.1) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ și $\Gamma, \psi \vdash \chi$, atunci $\Gamma, \varphi \vdash \chi$.

1. Presupunem $\Gamma, \varphi \vdash \psi$
 2. Presupunem $\Gamma, \psi \vdash \chi$
 3. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ (din (2), cu ajutorul lui (4.6.6), luând pe Δ ca $\{\varphi\}$).
 4. $\Gamma, \varphi, \vdash (\psi \rightarrow \chi)$ (din (3), cu ajutorul lui (4.6.1.i))
 5. $\Gamma, \varphi, \vdash \chi$ (din (1) și (4), cu ajutorul lui (4.6.1.e)), q.e.d.
- Vom demonstra acum o a doua lema:
- (4.7.2) $\Gamma, \varphi, \vdash (-(-\varphi))$
6. $\Gamma, \varphi, (-\varphi) \vdash \varphi$ (din (4.6.4.e), punctul (b), punând $\psi = \varphi$)
 7. $\Gamma, \varphi, (-\varphi) \vdash (-\varphi)$ (din (4.6.4.e), punctul (b), punând $\psi = (-\varphi)$)
 8. Dacă $\Gamma, \varphi, (-\varphi) \vdash \varphi$ și $\Gamma, \varphi, (-\varphi) \vdash (-\varphi)$, atunci $\Gamma, \varphi \vdash (-(-\varphi))$ (din 4.6.4.i), punând $\Gamma = \Gamma, \varphi$ și $\psi = (-\varphi)$
 9. $\Gamma, \varphi \vdash (-(-\varphi))$ (din (6), (7) și (8))
- Acum, aplicând lema (4.7.1) la (4.6.4.e), punctul (a) și (9) avem:
10. $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$
- De aici prin (4.6.1.i):
11. $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$
- iar dacă punem $\Gamma = \emptyset$, obținem pe (5.7), q.e.d.

*
* *

În cele ce urmează vom proceda într-un alt mod pentru a construi sintactic relația φ implică logic ψ . În primul rând, vom accepta că există un procedeu anterior de selectare a tautologiilor din mulțime propozițiilor lui $L(S)$. Acest procedeu poate fi metoda lui Hilbert, a lui Gentzen ori cea a valorii propozițiilor pentru diverse atribuiri. În al doilea rând, vom defini relația de implicație logică într-un mod mai general, ca: Σ implică logic φ – simbolic $\Sigma \vdash \varphi$ – unde Σ este o mulțime oarecare dar fixată de propoziții ale lui $L(S)$. Să observăm aici că: a) dacă Σ este $\{\varphi\}$, atunci relația $\Sigma \vdash \varphi$ devine $\varphi \vdash \varphi$, adică φ implică logic φ ; b) mulțimea Σ poate fi finită sau infinită.

Vom introduce noțiunea de *deducție formală* în logica propozițională $L(S)$.

Regula *detașării* (modus ponens) afirmă că:

Din φ și $(\varphi \rightarrow \psi)$ se inferă ψ .

Spunem că ψ e inferată din φ și θ prin detașare dacă θ este $(\varphi \rightarrow \psi)$. Să luăm acum o mulțime Σ , finită sau infinită, de propoziții din $L(S)$.

(4.8) Propoziția φ este *deductibilă* din Σ , în simboluri $\Sigma \vdash \varphi$, ddacă există un șir finit $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ astfel încât $\varphi = \psi_n$ și fiecare propoziție ψ_n ($0 \leq n$) este sau o

tautologie, sau aparține lui Σ , sau este inferată prin detașare din două propoziții ψ_p și ψ_q care apar mai devreme în șir (deci, $p < m, q < m$). Șirul $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ se numește o *deducție* a lui φ din Σ .

Să notăm următorul rezultat imediat: φ este deductibilă din mulțimea vidă $\Sigma = \emptyset$ ddacă φ este tautologie.

Următoarele definiții sunt foarte importante: mulțimea Σ de propoziții este inconsistentă ddacă oricare ar fi propoziția φ , $\Sigma \vdash \varphi$. Σ este *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă. Σ este *maximal consistentă* ddacă Σ este consistentă și singura mulțime consistentă în care Σ este inclusă e ea însăși.

(4.9.1) Dacă Σ este consistentă și Γ este mulțimea tuturor propozițiilor deductibile din Σ , atunci Γ este consistentă.

Demonstrație. Să presupunem că Σ este consistentă, dar Γ nu este consistentă. Atunci pentru orice φ , $\Gamma \vdash \varphi$. Așadar, pentru orice φ există o deducție $\psi_0, \dots, \psi_n = \varphi$ din Γ . Fiecare ψ_m este sau tautologie, sau aparține lui Γ , sau este inferată prin detașare din două propoziții ψ_p și ψ_q care apar mai devreme în șir. Să arătăm că există o deducție $\theta_0, \dots, \theta_r = \varphi$ a lui φ din Σ . Aceasta se construiește în felul următor: dacă ψ_0 este o tautologie, atunci θ_0 este ψ_0 . Dacă ψ_0 aparține lui Γ , cum Γ este mulțimea tuturor propozițiilor deductibile din Σ , înseamnă că ψ_0 este deductibilă din Σ . Așadar, există un șir finit $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{n_0}$ de propoziții care este o deducție a lui ψ_0 din Σ . Atunci punem în locul lui θ_0 șirul χ_0, χ_{n_0} . Presupunem acum că am construit segmentul șirului $\theta_0, \dots, \theta_i$ corespunzător deducției $\psi_0, \dots, \psi_n = \varphi$ pentru toți ψ_i , cu $i < m$. Dacă ψ_m este o tautologie, atunci acelui segment îi adăugăm pe ψ_m ; dacă ψ_m aparține lui Γ , atunci adăugăm acelui segment șirul $\zeta_0, \dots, \zeta_{n_m}$ care e o deducție a lui ψ_m din Σ ; dacă ψ_m se obține din două propoziții care apar anterior în șirul $\psi_0, \dots, \psi_n$, prin aplicarea regulii detașării, atunci segmentului lui $\theta_0, \dots, \theta_i$ pe care îl avem construit deja îi adăugăm pe ψ_m . În acest fel am obținut o deducție a lui φ din Σ . Cum φ este oarecare, înseamnă că $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice φ , ceea ce încalcă supoziția că Σ este o mulțime consistentă.

(4.9.2) Dacă Σ este maximal consistentă și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\varphi \in \Sigma$.

Demonstrație. Să presupunem că mulțimea maximal consistentă Σ este astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$, dar $\varphi \notin \Sigma$. Fie $\Gamma = \Sigma \cup \{\varphi\}$. Mulțimea Γ este, potrivit lui (4.9.1), consistentă. Dar $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\Sigma \neq \Gamma$, ceea ce contrazice faptul că Γ este maximal consistentă.

(4.9.3) Σ este inconsistentă ddacă pentru o propoziție ψ a lui $L(S)$, $\Sigma \models (\psi \wedge (\neg\psi))$.

Demonstrație. Presupunem mai întâi că Σ este inconsistentă. Atunci pentru orice ϕ al lui $L(S)$, $\Sigma \vdash \phi$. În particular, luând $\phi = (\psi \wedge (\neg \psi))$, obținem $\Sigma \vdash (\psi \wedge (\neg \psi))$. Presupunem acum că $\Sigma \vdash (\psi \wedge (\neg \psi))$. Să arătăm că pentru orice ϕ , $\Sigma \vdash \phi$. Așadar, trebuie să arătăm că există o deducție a lui ϕ din Σ . Întrucât $\Sigma \vdash (\psi \wedge (\neg \psi))$ există o deducție $\psi_0, \dots, \psi_n = (\psi \wedge (\neg \psi))$ a lui $(\psi \wedge (\neg \psi))$ din Σ . Să observăm de asemenea că $\theta = (((\psi \wedge (\neg \psi)) \rightarrow \phi)$ este o tautologie. Atunci șirul $\psi_0, \dots, \psi_n, \theta, \phi$ este o deducție a lui ϕ din Σ .

(4.9.4) *Teorema deducției.* $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ dacă $\Sigma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$.

Vom proba numai suficiența. Demonstrația va fi făcută prin inducție. Fie n cel mai mic număr pentru care există o deducție $\psi_0, \dots, \psi_n$ a lui ψ din $\Sigma \cup \{\phi\}$. Să arătăm mai întâi că teorema are loc pentru $n = 0$. În acest caz, fie 1) $\psi = \phi$, fie 2) ψ este o tautologie, fie 3) ψ aparține lui Σ . În primul caz, trebuie să arătăm că $\Sigma \vdash (\phi \rightarrow \phi)$, ceea ce e adevărat fiindcă $(\phi \rightarrow \phi)$ este o tautologie. În al doilea și al treilea caz, avem $\Sigma \vdash \psi$. Cum $(\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$ e o tautologie, șirul

$\psi, (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)), (\phi \rightarrow \psi)$

este o demonstrație a lui $(\phi \rightarrow \psi)$ din Σ . Fie acum $n > 0$. Față de cele trei cazuri, care se reiau aici ca și pentru $n = 0$, apare un al patrulea: ψ se obține din ψ_i și $\psi_j = (\psi_i \rightarrow \psi)$ prin detașare ($i < n, j < n$). Atât ψ_i cât și ψ_j sunt deductibile din $\Sigma \cup \{\phi\}$. În virtutea inducției, avem $(\phi \rightarrow \psi)$ și $(\phi \rightarrow \psi_i) = (\phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi))$ deductibile din Σ . Atunci șirul

$\theta_0 = (\phi \rightarrow \psi_i)$

$\theta_1 = (\phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi))$

$\theta_2 = ((\phi \rightarrow \psi_i) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)))$ (tautologie)

$\theta_3 = ((\phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$

$\theta_4 = (\phi \rightarrow \psi)$

este o deducție a lui $(\phi \rightarrow \psi)$ din Σ . Așadar, teorema este demonstrată pentru orice număr n .

(4.9.5) Fie Σ o mulțime maximal consistentă de propoziții ale lui $L(S)$.

Atunci:

- pentru fiecare propoziție ϕ , ori $\phi \in \Sigma$, ori $(\neg \phi) \in \Sigma$;
- pentru orice propoziții ϕ și ψ , $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$ dacă $\phi \in \Sigma$ și $\psi \in \Sigma$;
- pentru orice propoziții ϕ și ψ , $(\phi \vee \psi) \in \Sigma$ dacă $\phi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$;
- pentru orice propoziții ϕ și ψ , $(\phi \rightarrow \psi) \in \Sigma$ dacă sau $\phi \notin \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$;
- pentru orice propoziții ϕ și ψ , $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \Sigma$ dacă $\phi \in \Sigma$ atunci și numai atunci când $\psi \in \Sigma$.

Vom demonstra numai cazul (a). Să presupunem că Σ e maximal consistentă și că nici φ , nici $(\neg\varphi)$ nu aparțin lui Σ . Vom arăta că fie mulțimea $\Sigma \cup \{\varphi\}$, fie mulțimea $\Sigma \cup \{(\neg\varphi)\}$ este consistentă. Să presupunem că ambele mulțimi sunt inconsistente. Atunci, potrivit lui (4.9.3), $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash (\psi \wedge (\neg\psi))$ și $\Sigma \cup \{(\neg\varphi)\} \vdash (\psi \wedge (\neg\psi))$. Potrivit teoremei deducției, avem $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \wedge (\neg\psi)))$ și $\Sigma \vdash ((\neg\varphi) \rightarrow (\psi \wedge (\neg\psi)))$. Fie $\theta_0, \dots, \theta_n$ o deducție a lui $(\varphi \rightarrow (\psi \wedge (\neg\psi)))$ din Σ . Cum propoziția $\theta_{n+1} = ((\varphi \rightarrow (\psi \wedge (\neg\psi))) \rightarrow (\neg\varphi))$ este o tautologie, șirul $\theta_0, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}, \theta_{n+2} = (\neg\varphi)$ este o deducție a lui $(\neg\varphi)$ din Σ și deci $\Sigma \vdash (\neg\varphi)$. Analog, se arată că $\Sigma \vdash \varphi$. De aici, potrivit lui (5.9.2), avem $\varphi \in \Sigma$ și $(\neg\varphi) \in \Sigma$, ceea ce contrazice faptul că Σ este consistentă. Prin urmare, sau $\Sigma \cup \{\varphi\}$, sau $\Sigma \cup \{(\neg\varphi)\}$ este consistentă. Să presupunem, de exemplu, că prima mulțime este consistentă. Cum $\varphi \notin \Sigma$ avem $\Sigma \subsetneq \Sigma \cup \{\varphi\}$ și $\Sigma \neq \Sigma \cup \{\varphi\}$. Dar acest lucru este imposibil, fiindcă Σ este maximală. Așadar, supoziția inițială, că nici φ , nici $(\neg\varphi)$ nu aparțin lui Σ este falsă. Celelalte puncte ale teoremei (4.9.5) sunt lăsate ca exerciții.

(4.10). *Teorema lui Lindenbaum*. Orice mulțime Σ consistentă de propoziții poate fi extinsă la o mulțime Γ maximal consistentă (altfel zis, Σ este inclusă într-o mulțime maximal consistentă de propoziții).

Demonstrație. Să aranjăm toate propozițiile lui $L(S)$ într-un șir $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\alpha, \dots$. Ordinea în care punem aceste propoziții este oarecare; singura cerință este ca nici o propoziție să nu fie omisă, iar niciuna să nu apară decât o singură dată în acest șir. Vom construi acum un alt șir

$$\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \dots \subseteq \Sigma_\alpha \subseteq \dots$$

de mulțimi consistente de propoziții. Mulțimile Σ_i se definesc astfel: dacă $\Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$ este consistentă, punem $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$; altminteri punem $\Sigma_1 = \Sigma_0$. În pasul α , definim $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ dacă $\Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ este o mulțime consistentă; altminteri, $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha$. Când α este un ordinal limită, punem $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta$. Definim acum mulțimea Γ : ea este reuniunea tuturor mulțimilor Σ_α . Vom arăta că 1) Γ e consistentă și 2) Γ e maximală.

1) Să presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci, potrivit lui (4.9.3), $\Gamma \vdash (\psi \wedge (\neg\psi))$. Conform definiției relației $\vdash$, există o deducție $\psi_0, \dots, \psi_m$ a lui $(\psi \wedge (\neg\psi))$ din Γ . Fie $\theta_1, \dots, \theta_n$ cele m propoziții ale lui Γ care au fost folosite în această deducție. Putem alege un α astfel încât toate acestea să aparțină lui Σ_α (acest lucru e posibil; într-adevăr, fiecare din aceste propoziții are un loc unic determinat în șirul propozițiilor lui $L(S)$ și putem lua pe α drept cel mai mare număr avut de cele m propoziții). Dar, iarăși potrivit lui (4.9.3), înseamnă că Σ_α este inconsistentă, ceea ce e în contradicție cu construcția lui Γ .

2) Să presupunem acum că Γ nu este maximală. Există în acest caz o mulțime consistentă Δ astfel încât $\Gamma \neq \Delta$ și $\Gamma \subseteq \Delta$. Fie un $\varphi_\alpha \in \Delta$, care nu aparține lui Γ . Atunci $\Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ (care e inclusă în Δ) este consistentă și deci $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ este consistentă. Dar $\Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Gamma$ și deci $\varphi_\alpha \in \Gamma$, în contradicție cu supoziția făcută.

Odată cu demonstrarea teoremei lui Lindenbaum, să părăsim abordarea sintactică. Vom construi pandantul semantic al relației: φ implică logic ψ sau, mai în general, ψ se deduce din Σ .

Fie din nou Σ o mulțime de propoziții ale lui $L(S)$. Vom spune că M este un *model al lui Σ* , simbolic $M \models \Sigma$, dacă orice propoziție din Σ este adevărată în M (deci, M este model pentru orice propoziție din Σ). Mulțimea Σ este *realizabilă* dacă are cel puțin un model. Aceste noțiuni ne permit acum să formulăm cea mai importantă teoremă a teoriei modelelor pentru logica propozițiilor: teorema generalizată a completitudinii. Teorema furnizează un criteriu pentru a determina când o mulțime de propoziții este realizabilă. Să notăm de asemenea că teorema leagă între ele (prin raportul: dacă și numai dacă) condiții de natură sintactică și condiții de natură semantică.

(4.11) *Teorema generalizată a completitudinii.* O mulțime Σ de propoziții ale lui $L(S)$ este consistentă dacă este realizabilă.

Demonstrația are două părți:

1) Necesitatea. Să presupunem că Σ este realizabilă și să arătăm că este consistentă. Fie M un model pentru care $M \models \Sigma$. Vom arăta că orice propoziție care este deductibilă din Σ este adevărată în M . Fie $\psi_0, \dots, \psi_n = \varphi$ o deducție a unei propoziții φ din Σ . Fie $m < n$. Dacă $\psi_m \in \Sigma$, atunci ψ_m este adevărată în M , conform supoziției. De asemenea, potrivit teoremei de corectitudine (3.5), dacă ψ_m este o tautologie, atunci e adevărată în M . Iar dacă ψ_m e obținută din două propoziții ψ_i și $(\psi_i \rightarrow \psi_m)$ adevărate în M , atunci evident că și ψ_m este adevărată în M . Decurge de aici, prin inducție, că toate propozițiile $\psi_0, \dots, \psi_n$ sunt adevărate în M . Așadar, orice propoziție, dacă este deductibilă din Σ , este adevărată în M . Dar dacă Σ ar fi inconsistentă, atunci $(\varphi \wedge (\neg\varphi))$ ar fi deductibilă din Σ – și, deci, ar fi adevărată în M . Dar nici o propoziție de forma $(\psi \wedge (\neg\psi))$ nu poate fi adevărată în M . Așadar, Σ e consistentă.

2) Suficiența. Să presupunem că Σ e consistentă. Trebuie să arătăm că Σ e realizabilă. Întrucât Σ e consistentă, potrivit teoremei lui Lindenbaum, putem să o extindem la o mulțime Γ maximal consistentă. Acum construim un model M al lui Γ și deci al lui Σ . Fie M mulțimea literelor propoziționale $p \in S$ care au proprietatea că $p \in \Gamma$. Prin inducție, se arată că pentru orice propoziție φ

(i) $\varphi \in \Gamma$ dacă $M \models \varphi$.

Într-adevăr, prin definiție (i) are loc când ϕ este literă propozițională. Expresia (4.9.5) punctul (a) garantează că dacă (i) are loc pentru $\phi = \psi$, atunci (i) va avea loc și dacă luăm $\phi = (\neg\psi)$; punctul (b) garantează că dacă (i) are loc pentru $\phi = \psi$ și pentru $\phi = \chi$, atunci are loc și pentru $\phi = (\psi \wedge \chi)$ – și la fel pentru celelalte trei cazuri. Din (i) decurge că M este un model al lui Γ , în simboluri $M \models \Gamma$; și cum $\Sigma \subseteq \Gamma$, înseamnă că $M \models \Sigma$. Așadar, Σ are un model și este, deci, realizabilă, q.e.d.

Acum putem introduce relația semantică $\Sigma \models \phi$, corespunzătoare relației sintactice $\Sigma \vdash \phi$ (ϕ este deductibilă din Σ). Vom spune că ϕ este o consecință a lui Σ , în simboluri $\Sigma \models \phi$, ddacă orice model al lui Σ este și model al lui ϕ . Raportul dintre relațiile de deductibilitate și de consecință este dat de următoarea teoremă:

$$(4.12) \quad \Sigma \vdash \phi \text{ ddacă } \Sigma \models \phi.$$

Vom demonstra această teoremă în paragraful următor, folosind teorema de compactitate. Citiitorul va putea să o demonstreze însă ca exercițiu chiar acum, apelând la noțiunile deja introduse. Să notăm însă aici câteva consecințe imediate ale teoremei (5. 12). Spunem că ϕ este o *consecință* a lui ψ ddacă orice model al lui ψ este și model al lui ϕ , simbolic $\psi \models \phi$. Se observă imediat că definiția relației $\psi \models \phi$ se obține din cea a relației $\Sigma \models \phi$ punând $\Sigma = \{\psi\}$. De asemenea, spunem că două propoziții ϕ și ψ sunt *semantic echivalente*, în simboluri $\phi \models \psi$ și $\psi \models \phi$, ddacă au aceleași modele. Este evident că

$$\phi \models \psi \text{ ddacă } \phi \models \psi \text{ și } \psi \models \phi.$$

Din (4.12) decurge că

$$(4.13) \quad \psi \vdash \phi \text{ ddacă } \psi \models \phi.$$

Să demonstrăm acum un corespondent semantic pentru teorema deducției:

$$(4.14) \quad \Sigma \cup \{\phi\} \models \psi \text{ ddacă } \Sigma \models (\phi \rightarrow \psi)$$

Demonstrație:

1) Necesitatea. Să presupunem că $\Sigma \models (\phi \rightarrow \psi)$. Fie un model M al lui $\Sigma \cup \{\phi\}$. Atunci M este și un model al lui Σ . Potrivit presupunerii, în M este adevărată propoziția $(\phi \rightarrow \psi)$. Dar, întrucât M este model al lui $\Sigma \cup \{\phi\}$, înseamnă că ϕ este adevărată în M . În consecință, ψ e adevărată în M , q.e.d.

2) Suficiența. Să presupunem că $\Sigma \cup \{\phi\} \models \psi$. Fie un model M al lui Σ . Trebuie să arătăm că M este un model și pentru $(\phi \rightarrow \psi)$. Dacă M nu este model pentru $(\phi \rightarrow \psi)$, atunci $M \models (\neg(\phi \rightarrow \psi))$, deci $M \models (\phi \wedge (\neg\psi))$. Așadar, M este un model pentru ϕ și este un model pentru $(\neg\psi)$. Fiind și model pentru ϕ , M este un model pentru $\Sigma \cup \{\phi\}$. Atunci însă, conform presupunerii

făcute, M este și un model pentru ψ . Dar aceasta contrazice faptul că $M \models (\neg\psi)$, q.e.d.

Dacă în (4.14) luăm pe Σ ca mulțimea vidă, obținem:

$$(4.15) \quad \varphi \models \psi \text{ ddacă } \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

și deci, din această teoremă și (4.13), decurge că

$$(4.16) \quad \varphi \vdash \psi \text{ ddacă } \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

În sfârșit, ținând cont de definiția relației de echivalență semantică avem:

$$(4.17) \quad \varphi \text{ este semantic echivalentă cu } \psi \text{ } (\varphi \models \psi) \text{ ddacă } \models (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

§ 5. Teorema de compactitate

Teorema de compactitate este o proprietate remarcabilă a logicii propozițiilor, precum și a logicii de ordinul întâi a predicatelor. Ea este prima teoremă de caracterizare a unor logici pe care o întâlnim. Compactitatea este o proprietate *pur semantică*, în sensul că nu face apel la nici o noțiune sintactică. Sensul teoremei este următorul: problema pe care ne-o punem e aceea de a afla când este realizabilă o mulțime Σ de propoziții. Dacă Σ este finită, răspunsul e simplu: fie $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Potrivit definiției (2.2), conjuncția

$$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\dots \wedge \varphi_n) \dots))$$

este o propoziție ψ . Σ este realizabilă când există un model în care sunt adevărate toate elementele sale. Dar, potrivit definiției (3.2), punctul (c), Σ este adevărată în M dacă propozițiile $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sunt simultan adevărate în M . Așadar, Σ este realizabilă dacă propoziția ψ (= conjuncția tuturor propozițiilor din Σ) este realizabilă.

Dacă însă mulțimea Σ este infinită, nu mai putem proceda la fel, fiindcă nu putem construi o conjuncție infinită. Într-adevăr, potrivit lui (2.2), numai șiruri finite de simboluri ale lui $L(S)$ sunt propoziții. Teorema de compactitate oferă însă aici un răspuns: să considerăm toate submulțimile *finite* ale lui Σ . Dacă Σ este infinită, ea are desigur infinit de multe submulțimi și are infinit de multe submulțimi infinite. Dar teorema de compactitate spune că nu este nevoie să luăm în considerare decât submulțimile finite ale lui Σ pentru a determina dacă aceasta este sau nu realizabilă. Să admitem acum că *fiecare* astfel de submulțime este realizabilă, deci are un model. Desigur, două submulțimi finite ale lui Σ pot să aibă modele diferite, și e posibil ca un model M să fie model pentru unele, dar nu și pentru alte submulțimi finite ale lui Σ . Dar dacă fiecare submulțime finită a lui Σ are un model al ei, atunci teorema de compactitate ne asigură că există și un model pentru Σ ca întreg, deci că și Σ este realizabilă.

Vom spune că o mulțime Σ este *finit realizabilă* dacă orice submulțime finită a lui Σ este realizabilă. Desigur, dacă Σ este finită ea nu are decât submulțimi finite și deci ea este finit realizabilă dacă este realizabilă. Teorema de compactitate extinde această proprietate pentru orice mulțime Σ , finită sau infinită:

(6.1) *Teorema de compactitate.* Σ este finit realizabilă dacă Σ este realizabilă.

Demonstrație:

1) Necesitatea. Demonstrația este trivială. Într-adevăr, dacă Σ este realizabilă, înseamnă că există un model M în care sunt adevărate toate propozițiile din Σ . Fie Γ o submulțime finită a lui Σ . Desigur, în M sunt adevărate toate propozițiile din Γ , deci $M \models \Gamma$, adică Γ este realizabilă.

2) Suficiența. Să presupunem că Σ este finit realizabilă, dar Σ nu este realizabilă. Atunci, potrivit teoremei generalizate a completitudinii – teorema (4.11) – Σ este inconsistentă. Deci $\Sigma \vdash (\psi \wedge (\neg\psi))$. Există prin urmare o deducție $\psi_0, \dots, \psi_n$ a lui $(\psi \wedge (\neg\psi))$ din Σ în care sunt folosite, alături de tautologii, m propoziții din Σ ($m \leq n$). Fie Γ această submulțime a lui Σ . Evident, Γ este finită. Cum $\Gamma \vdash (\psi \wedge (\neg\psi))$, înseamnă că este inconsistentă. Iarși potrivit teoremei generalizate a completitudinii, înseamnă că Γ nu este realizabilă, și deci o submulțime finită a lui Σ nu este realizabilă, ceea ce încalcă supoziția făcută, q.e.d.

Acum este posibil să demonstrăm propoziția (4.12): $\Sigma \vdash \phi$ dacă $\Sigma \models \phi$. Să observăm că dacă Σ este inconsistentă, atunci potrivit teoremei generalizate a completitudinii, ea nu este realizabilă, deci nu are nici un model. Atunci oricare ar fi propoziția ϕ , e adevărat că $\Sigma \models \phi$ (căci această relație revine la: oricare ar fi modelul M , dacă $M \models \Sigma$, atunci $M \models \phi$, iar antecedentul implicației e fals). Pe de altă parte, potrivit definiției inconsistenței, întrucât Σ e inconsistentă, avem $\Sigma \vdash \phi$, oricare ar fi propoziția ϕ . Așadar în acest caz teorema (4.12) este trivial adevărată. Să presupunem acum că Σ este consistentă.

1) Necesitatea. Să presupunem că ϕ e o consecință a lui Σ , dar că ϕ nu este deductibilă din Σ . Atunci nu există nici o deducție $\psi_0, \dots, \psi_n = \phi$ a lui ϕ din Σ . Cum în $\psi_0, \dots, \psi_n$ apar un număr finit de propoziții din Σ – fie Γ mulțimea acestora – înseamnă că nu există nici o submulțime finită Γ a lui Σ astfel încât $\Gamma \vdash \phi$. Aceasta înseamnă că pentru fiecare astfel de mulțime Γ , mulțimea $\Gamma \cup \{(\neg\phi)\}$ nu este neconsistentă; altfel zis, $\Gamma \cup \{(\neg\phi)\}$ este consistentă, oricare ar fi submulțimea finită Γ a lui Σ . Potrivit teoremei generalizate a completitudinii, $\Gamma \cup \{(\neg\phi)\}$ este realizabilă, oricare ar fi submulțimea finită Γ a lui Σ . Să observăm acum că aceste mulțimi sunt submulțimile finite ale mulțimii $\Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$. Aplicând teorema de compactitate, înseamnă că mulțimea $\Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$ are un model M . Dar întrucât ϕ este o consecință a lui Σ , înseamnă

că avem în acest caz $M \models \Sigma$ și $M \models \varphi$, ceea ce contrazice faptul că M , fiind un model pentru $\Sigma \cup \{(-\varphi)\}$, este un model și pentru $(-\varphi)$.

2) Suficiența. Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$ și că M este un model al lui Σ . În demonstrația teoremei (4.11), partea care viza necesitatea, am arătat că dacă $M \models \Sigma$, atunci orice propoziție deductibilă din Σ este adevărată în M . Așadar, $M \models \varphi$. Prin urmare, întrucât M este oarecare, avem: orice model al lui Σ este un model al lui φ , adică $\Sigma \models \varphi$, q.e.d.

Alături de teorema de compactitate, un al doilea rezultat fundamental în logica propozițiilor este teorema lui Craig. Descoperită în 1957, teorema este cel mai recent și, după unii autori, ultimul rezultat fundamental asupra logicii propozițiilor. Teorema poate fi formulată în două variante, sintactică și semantică; însă, ținând seamă de teoremele de completitudine (în particular, de (4.13)), cele două variante sunt echivalente. Să notăm de asemenea că rezultatul lui Craig poartă numele de teorema *interpolării*. Într-adevăr, teorema arată că, ori de câte ori o propoziție φ implică o altă propoziție ψ , există un interpolant, adică o a treia propoziție care se așează între cele două, între antecedent și consecvent; există deci un χ , care e implicat de φ , dar implică pe ψ . Teorema lui Craig arată care sunt condițiile îndeplinite de această nouă propoziție χ .

(5.2.1) *Teorema de interpolare a lui Craig; varianta semantică.* Dacă $\varphi \models \psi$, atunci există o propoziție χ astfel încât $\varphi \models \chi$ și $\chi \models \psi$ și orice literă propozițională care apare în χ apare atât în φ cât și în ψ .

(5.2.2) *Teorema de interpolare a lui Craig; varianta sintactică.* Dacă $\varphi \vdash \psi$, atunci există o propoziție χ astfel încât $\varphi \vdash \chi$ și $\chi \vdash \psi$ și orice literă propozițională care apare în χ apare atât în φ cât și în ψ .

Vom da demonstrația pentru varianta semantică (5.2.1). Să notăm cu $S_1 \subseteq S$ mulțimea literelor propoziționale care apar în φ și cu $S_2 \subseteq S$ mulțimea literelor propoziționale care apar în ψ ; evident, literele propoziționale care apar în χ sunt elemente ale mulțimii $S_1 \cap S_2 \subseteq S$. Mulțimile $S_1, S_2, S_1 \cap S_2$ sunt desigur finite. Să presupunem că $S_1 \cap S_2$ are k elemente. Să ne amintim că un model M este o submulțime a lui S . Atunci modelul $M^+ = M \cap (S_1 \cap S_2)$ este tot o submulțime a lui S . Mai mult, întrucât $M \cap (S_1 \cap S_2) \subseteq S_1 \cap S_2$, înseamnă că M^+ este o submulțime a lui $S_1 \cap S_2$. Cum $S_1 \cap S_2$ are k elemente, există 2^k submulțimi ale sale și deci există 2^k modele de tip M^+ .

Fie acum $p_1, \dots, p_k$ propozițiile din $S_1 \cap S_2$ și fie un model oarecare M în care propoziția φ este adevărată. Să construim o conjuncție de k elemente $\chi_i = (\theta_1 \wedge (\theta_2 \dots \wedge \theta_k) \dots)$ astfel: dacă p_m ($1 \leq m \leq k$) aparține lui M^+ , atunci $\theta_m = p_m$; dacă $p_m \notin M^+$, atunci $\theta_m = (-p_m)$. Acum construim pe

χ ca disjuncția tuturor propozițiilor χ_i . Întrucât există 2^k modele M^* , propoziția φ este adevărată în cel mult 2^k modele M^* și deci în $\chi = \chi_1 \vee \chi_2 \vee \chi_3 \dots \chi_n$, $n \leq 2^k$.

Trebuie să arătăm că $\varphi \models \chi$ și $\chi \models \psi$.

1) $\varphi \models \chi$, adică pentru orice model M , dacă $M \models \varphi$, atunci $M \models \chi$. Să admitem că M este un model pentru φ . Să arătăm că M este un model și pentru χ . Într-adevăr, întrucât $M \models \varphi$, avem și $M^* \models \varphi$. Atunci, potrivit definiției lui χ , avem $M^* \models \chi$. Dar următoarea lemă poate fi probată foarte ușor:

(5.3) Dacă $M \models \chi$ și nici o literă propozițională care apare în χ nu aparține mulțimii S' , atunci $M \cup S' \models \chi$.

Pentru aceasta, folosim propoziția (3.4). Fie χ astfel încât toate literele propoziționale care apar în χ se află printre $p_0, \dots, p_n$. Să presupunem că valoarea lui χ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$ este t . Construim acum un model M astfel: dacă în $a_0, \dots, a_n$, a_i este t , atunci $p_i \in M$; dacă a_i este f , atunci $p_i \notin M$. Propoziția (4.8) ne dă $M \models \chi$. Fie acum o mulțime S' de litere propoziționale $p_{n+1}, \dots, p_{n+m}$ care sunt diferite de $p_0, \dots, p_n$. Construim atribuirea $a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}$. Ei îi facem să-i corespundă un model $M \cup S'$ astfel: dacă $0 \leq i \leq n$, atunci $p_i \in M \cup S'$ dacă $p_i \in M$; dacă $i > n$, atunci $p_i \in M \cup S'$ dacă a_i este t . Potrivit propoziției (3.4), valoarea lui χ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}$ este t ; apelând din nou la propoziția (3.8), obținem $M \cup S' \models \chi$, q.e.d.

Să observăm acum că mulțimea $M - M^*$ nu cuprinde nici o literă propozițională care apare în χ . Așadar, putem folosi lema (5.3) pentru a obține $M \cup (M - M^*) \models \chi$. Dar, desigur, $M \cup (M - M^*) = M$ și deci $M \models \chi$, q.e.d.

2) $\chi \models \psi$, adică pentru orice model M , dacă $M \models \chi$, atunci $M \models \psi$. Să presupunem că M este astfel încât $M \models \chi$. Atunci $M^* \models \chi$. Într-adevăr să observăm că, folosind teoremele (3.4) și (3.8), putem demonstra analog lui (5.3) că:

(5.4) Dacă $M \cup S' \models \chi$ și nici o literă propozițională din χ nu apare în S' , atunci $M \models \chi$.

(Exercițiu: plecând de la (5.3), să se demonstreze (5.4) cu ajutorul logicii propozițiilor și al definiției (3.2) a modelului).

Dacă în (5.4) luăm pe M inclus în mulțimea $S_1 \cap S_2$, deci M va cuprinde doar litere propoziționale care apar în χ , atunci $M^* = M$ și $(M \cup S')^* = M$. Acum, dacă $M^* \models \chi$, există (conform construcției lui χ) un model M' astfel încât $M^* = M'$ și $M' \models \varphi$. Putem, potrivit lemei (5.4), să-l luăm pe M' astfel încât mulțimea M' să nu cuprindă decât litere propoziționale din S_1 , deci $M' \subseteq S_1$. Fie M'' mulțimea literelor propoziționale din M care nu fac parte

din S_1 (deci, care apar în ψ , dar nu și în ϕ). Atunci e îndeplinită condiția din (5.3) și avem $M' \cup M'' \models \phi$. Cum, prin ipoteză, $\phi \models \psi$, înseamnă că vom avea de asemenea $M' \cup M'' \models \psi$.

Să observăm de asemenea că mulțimea $M' \cup M''$ cuprinde toate literele propoziționale din S_2 care aparțin lui M . Într-adevăr, cele care sunt comune lui S_1 și S_2 apar în M' și deci și în M' , iar cele care aparțin numai lui S_2 sunt cuprinse în M'' . Fie S'' mulțimea literelor propoziționale din $M' \cup M''$ care nu fac parte din S_2 (deci nu apar în propoziția ψ). Atunci, aplicând lema (5.4), obținem:

$$(M' \cup M'') - S'' \models \psi.$$

Să notăm cu M''' acest nou model $(M' \cup M'') - S''$. În sfârșit, să construim mulțimea literelor propoziționale din M care nu apar în M''' . Ele fie aparțin lui S_1 , fie nu aparțin nici lui S_1 și nici lui S_2 . Să notăm cu M'''' această mulțime. Evident, putem aplica acum lema (5.3) pentru a obține

$$M''' \cup M'''' \models \psi.$$

Dar $M''' \cup M''''$ este exact mulțimea M , deci $M \models \psi$. Așadar, am arătat că, pentru un model oarecare M , dacă acesta este un model al lui χ , este și model al lui ψ . Deci $\chi \models \psi$, q.e.d.

În continuare vom introduce câteva noțiuni care, în cele ce urmează, vor avea un rol remarcabil.

Să observăm că fiecărei propoziții ϕ a lui $L(S)$ putem face să-i corespundă o mulțime de modele unic determinată: mulțimea Φ a modelelor în care propoziția ϕ este adevărată. Vom spune că Φ este judecata exprimată de propoziția ϕ . Problema este însă următoarea: dacă fiecărei propoziții îi corespunde o mulțime de modele (o judecată), este adevărat și invers, anume că fiecărei mulțimi de modele îi corespunde o propoziție, anume propoziția care are *exact* acele modele? Răspunsul este negativ: există mulțimi de modele care nu reprezintă mulțimea modelelor unei propoziții. Într-adevăr, să considerăm situația când mulțimea S a literelor propoziționale are un număr infinit (numărabil) de elemente. Atunci, potrivit definiției propozițiilor, mulțimea acestora este tot infinit numărabilă. Dar există tot atâtea modele câte submulțimi are mulțimea S . Și, potrivit teoremei lui Cantor, mulțimea acestor submulțimi ale lui S este infinit nenumărabilă. Aceasta înseamnă, pur și simplu, că mulțimile de modele sunt „mai multe” decât propozițiile și, deci, nu putem să atașăm fiecărei mulțimi de modele o propoziție a lui $L(S)$, astfel încât unor mulțimi diferite să le atașăm propoziții diferite.

Vom spune că o mulțime de modele este *elementară* dacă există o propoziție ϕ astfel încât X este mulțimea modelelor lui ϕ , în simboluri: $M \models \phi$ dacă

$M \in X$. În general, vom spune că X este *elementară în sens larg* ddacă există o mulțime Σ de propoziții astfel încât X este mulțimea modelelor lui Σ . În simboluri,

$$M \models \Sigma \text{ ddacă } M \in X.$$

În cele ce urmează vom menționa câteva aplicații ale teoremelor de completitudine și compactitate. Vom introduce noțiunea formală de teorie și vom defini câteva dintre trăsăturile logice ale teoriilor.

O *teorie* (în $L(S)$) este o mulțime Σ de propoziții (ale lui $L(S)$). O teorie este *închisă* în raport cu relația de implicație logică ddacă ea conține orice propoziție pe care o implică. Sintactic, aceasta revine la a spune că o teorie este închisă ddacă ea conține orice propoziție deductibilă din ea; în simboluri, Σ este închisă ddacă din $\Sigma \vdash \varphi$ decurge că $\varphi \in \Sigma$.

(5.5) Fie Σ o teorie închisă. Atunci propoziția φ aparține lui Σ ddacă φ este o consecință a lui Σ , în simboluri: $\varphi \in \Sigma$ ddacă $\Sigma \models \varphi$.

Demonstrație. Mai întâi să presupunem că $\varphi \in \Sigma$. Atunci φ este evident o consecință a lui Σ : $\Sigma \models \varphi$. Să presupunem acum că φ este o consecință a lui Σ . Potrivit teoremei (4.12), rezultă că φ este deductibilă din Σ și deci, din definiția teoriei închise, $\varphi \in \Sigma$.

În cele ce urmează vom presupune că toate teoriile sunt închise.

(5.6) O teorie Σ este *contradictorie* ddacă ea cuprinde orice propoziție.

De aici se obține imediat: o teorie este *consistentă* ddacă nu este contradictorie. Aplicând teorema de completitudine, obținem: o teorie este consistentă ddacă are un model.

Vom analiza două proprietăți mai importante ale teoriilor: *axiomatizabilitatea* și *completitudinea*. Să începem cu a doua.

O teorie Σ este *completă* ddacă oricare ar fi propoziția φ , sau $\Sigma \models \varphi$, sau $\Sigma \models (\neg \varphi)$, nu însă ambele. Este evident că potrivit acestei definiții, orice teorie completă este necontradictorie. Într-adevăr, dacă Σ ar fi contradictorie, atunci am avea $\Sigma \vdash (\varphi \wedge (\neg \varphi))$ și deci $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash (\neg \varphi)$. Aplicând teorema (4.12), obținem: $\Sigma \models \varphi$ și $\Sigma \models (\neg \varphi)$, ceea ce intră în contradicție cu definiția teoriei complete.

Teoriile complete pot fi caracterizate atât în termeni sintactici, cât și în termeni semantici. Teorema care urmează explicitează acest lucru: condiția (b) este sintactică, iar (c) este semantică. Cum se va vedea ușor, pentru a demonstra această teoremă teoremele de completitudine sunt esențiale.

(5.7) Următoarele condiții sunt echivalente:

a) Σ este o teorie completă.

b) Mulțimea propozițiilor deductibile din Σ este maximal consistentă.

c) Σ este exact un model.

Pentru a demonstra pe (5.7), arătăm că: (a) implică (b), (b) implică (c), iar (c) implică (a). Decurge de aici că cele trei condiții sunt echivalente.

Să presupunem mai întâi că Σ este completă. Potrivit teoremei (4.12), oricare ar fi propoziția φ , $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash (\neg \varphi)$, dar nu și ambele. Fie Γ mulțimea propozițiilor deductibile din Σ . Evident, Γ este o teorie consistentă. Să arătăm că Γ este maximală. Vom admite că există o altă mulțime consistentă Γ' , care cuprinde pe Γ . Fie $\varphi \in \Gamma$. Cum Γ este consistentă, nu avem $(\neg \varphi) \in \Gamma$. Dar, cum pentru orice φ , $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash (\neg \varphi)$ înseamnă că $\varphi \in \Gamma$ sau $(\neg \varphi) \in \Gamma$. Însă nu e posibil ca $(\neg \varphi)$ să aparțină lui Γ , căci atunci, deoarece Γ e inclus în Γ' , ar trebui să avem și $(\neg \varphi) \in \Gamma'$, ceea ce am văzut că nu e cazul. Așadar, $\varphi \in \Gamma$ și deci $\Gamma = \Gamma'$, ceea ce probează că Γ este maximală.

Să presupunem acum că Γ este o mulțime maximal consistentă și să arătăm că Σ are exact un model. Într-adevăr, dacă $M \models \Sigma$, atunci $M \models \Gamma$. Dacă există și un alt model M' al lui Σ , atunci de asemenea $M' \models \Gamma$. Presupunem că M este diferit de M' ; atunci există o propoziție φ astfel încât M este un model pentru φ , deci $M \models \varphi$, dar φ este falsă în M' , deci $M' \models (\neg \varphi)$. Dar Γ fiind maximal consistentă, fie $\varphi \in \Gamma$, fie $(\neg \varphi) \in \Gamma$. De pildă, în primul caz, cum $M' \models \Gamma$, avem $M' \models \varphi$. Însă acest fapt contrazice pe $M' \models (\neg \varphi)$. Iar dacă $(\neg \varphi) \in \Gamma$, atunci vom avea $M \models (\neg \varphi)$, ceea ce iarăși nu este posibil.

În sfârșit, trebuie arătat că dacă Σ are exact un model, atunci este completă. Demonstrația o lășăm ca exercițiu.

Vom trece acum la problema axiomatizabilității teoriilor. Spunem că o mulțime Δ de propoziții este o *mulțime de axiome* pentru o teorie Σ dacă Δ și Σ au aceleași consecințe. Aplicând teoreme de completitudine (5.12), obținem imediat următoarea caracterizare alternativă:

(5.8) Δ este o mulțime de axiome pentru teoria Σ dacă și numai dacă din Δ sunt deductibile aceleași propoziții ca din Σ , în simboluri $\Delta \vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\Sigma \vdash \varphi$.

Lui (5.8) i se poate atașa un corespondent semantic:

(5.9) Δ este o mulțime de axiome pentru teoria Σ dacă și numai dacă Δ și Σ au aceleași modele.

Demonstrație: 1) Necesitatea. Să presupunem că Σ și Δ au aceleași modele. Fie o consecință φ a lui Σ : $\Sigma \vdash \varphi$; deci, pentru orice model M , dacă M este un model al lui Σ , atunci M este un model al lui φ , în simboluri: dacă $M \models \Sigma$, atunci $M \models \varphi$. Dar, conform supoziției, pentru orice model M , $M \models \Sigma$ dacă și numai dacă $M \models \Delta$. Deci, pentru orice model M , dacă $M \models \Delta$, atunci $M \models \varphi$, adică $\Delta \vdash \varphi$. Analog, se demonstrează că dacă φ e o consecință a lui Δ , atunci φ e consecință a lui Σ . Așadar, Δ și Σ au aceleași consecințe.

2) Suficiența. Fie Δ o mulțime de axiome pentru Σ și să presupunem că există un model M astfel încât $M \models \Sigma$, dar nu este adevărat că $M \models \Delta$. Aceasta înseamnă că există o propoziție ϕ din Δ astfel încât nu e adevărat că $M \models \phi$, deci $M \models (\neg\phi)$. Dar, dacă ϕ aparține lui Δ , atunci evident $\Delta \vdash \phi$ și, conform teoremei de completitudine, $\Delta \models \phi$. Însă cum Δ este o mulțime de axiome pentru Σ , înseamnă că $\Sigma \models \phi$. Adică, oricare ar fi modelul M al lui Σ , avem $M \models \phi$. Or, am admis mai devreme că există un model M al lui Σ pentru care $M \models (\neg\phi)$ ceea ce duce la contradicție, q.e.d.

Desigur că o mulțime de axiome pentru o teorie Σ este, potrivit definiției de mai sus, Σ însăși. De obicei, noi căutăm să găsim însă mulțimi de axiome cu mai puține elemente decât Σ , eventual mulțimi finite de axiome. Vom spune că o teorie Σ este *finit axiomatizabilă* dacă ea are o mulțime finită de axiome. Să observăm că dacă Δ este o mulțime finită de axiome pentru Σ , atunci putem forma conjuncția tuturor propozițiilor din Δ . Ca urmare, această unică propoziție formează o mulțime de axiome pentru Σ și, deci, avem:

(5.10) O teorie Σ este finit axiomatizabilă dacă are o singură axiomă.

Un rezultat mai puțin trivial este următorul:

(5.11) Fie Σ_1 și Σ_2 două teorii, astfel încât mulțimea modelelor lui Σ_1 este complementara mulțimii modelelor lui Σ_2 . Atunci atât Σ_1 cât și Σ_2 sunt finit axiomatizabile.

Demonstrație. Cele două teorii îndeplinesc condiția: dacă $M \models \Sigma_1$ atunci nu e adevărat că $M \models \Sigma_2$; și dacă nu e adevărat că $M \models \Sigma_1$, atunci $M \models \Sigma_2$. Nu există așadar un model comun celor două teorii, ceea ce înseamnă că teoria $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ nu este realizabilă. Conform teoremei de compactitate, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ nu este nici finit realizabilă. Putem alege deci niște mulțimi finite $\Delta_1 \subseteq \Sigma_1$ și $\Delta_2 \subseteq \Sigma_2$ astfel încât $\Delta_1 \cup \Delta_2$ să nu fie realizabilă. Fie acum un model M al lui $L(S)$. Dacă $M \models \Delta_1$, înseamnă că M nu este model pentru Δ_2 și prin urmare M nu este model pentru Σ_2 . Dar atunci M este un model al lui Σ_1 , adică $M \models \Sigma_1$. Pe de altă parte, evident că dacă M' e un model pentru Σ_1 , atunci M' este model pentru Δ_1 . Decurge de aici că Σ_1 și Δ_1 au aceleași modele și, prin intermediul lui (5.9), că Δ_1 este o mulțime finită de axiome pentru Σ_1 . La fel se arată că Δ_2 este o mulțime finită de axiome pentru Σ_2 , q.e.d.

În demonstrarea lui (5.11) am folosit teorema de compactitate. Ea va interveni de asemenea și în demonstrarea următoarelor două teoreme (5.12) și (5.13). Aceste teoreme stabilesc legături între relații semantice – anume, relații între modele -- și proprietăți sintactice ale propozițiilor. Să începem prin a defini două astfel de proprietăți sintactice:

1) O propoziție φ este *pozitivă* dacă ea e construită din litere propoziționale folosind doar disjuncția și conjuncția. De exemplu, propoziția $(p \wedge ((q \vee r) \wedge p))$ este pozitivă, în timp ce $(\neg p)$ și $(p \leftrightarrow q)$ nu sunt pozitive.

2) O propoziție φ este *condițională* dacă ea este o conjuncție $(\varphi_1 \wedge (\dots \varphi_n) \dots)$, iar fiecare φ_i este sau o literă propozițională, sau o implicație de forma $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (\dots \rightarrow p_m) \dots))$ ori de forma $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (\dots \rightarrow \neg p_m) \dots))$

Semantic, să formulăm următoarele definiții:

1) O teorie Σ este *crescătoare* dacă ori de câte ori $M \models \Sigma$ și $M \subseteq M'$, atunci $M' \models \Sigma$.

2) O teorie Σ este *închisă față de intersecții* dacă ori de câte ori $M \models \Sigma$ și $M' \models \Sigma$, atunci, $M \cap M' \models \Sigma$.

Așadar, o teorie este crescătoare când este adevărată în toate modelele care cuprind un model în care ea e adevărată; și e închisă față de intersecții dacă e adevărată în modelul intersecție a două modele în care e adevărată.

Teoremele care urmează leagă între ele aceste noțiuni sintactice și semantice:

(5.12) O teorie consistentă Σ este crescătoare dacă are o mulțime de axiome pozitive.

(5.13) O teorie Σ e închisă față de intersecții dacă are o mulțime de axiome condiționale.

Vom demonstra doar propoziția (5.12).

1) Necesitatea. Să presupunem că Σ este consistentă și că are o mulțime Δ de axiome pozitive. Fie un model M al lui Σ . Atunci M este un model și pentru Δ , potrivit teoremei (5.9). Fie un model M' astfel încât $M \subseteq M'$. Să arătăm că orice propoziție φ pozitivă dacă e adevărată în M , atunci este adevărată și în M' . Demonstrația se face prin inducție asupra structurii lui φ . Mai întâi, dacă φ este o literă propozițională, iar $M \models \varphi$, înseamnă că $\varphi \in M$ și deci $\varphi \in M'$, adică $M' \models \varphi$. Să presupunem acum că pentru propozițiile ψ_1 și ψ_2 această proprietate e satisfăcută. Să arătăm că va fi satisfăcută și pentru $\varphi \models (\psi_1 \vee \psi_2)$ și pentru $\varphi \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$. În primul caz, dacă $M \models \varphi$, atunci $M \models \psi_1$ sau $M \models \psi_2$. Ca urmare, $M' \models \psi_1$ sau $M' \models \psi_2$, ceea ce (potrivit definiției modelului) implică $M' \models (\psi_1 \vee \psi_2)$, adică $M' \models \varphi$. În al doilea caz, dacă $M \models \varphi$, atunci $M \models \psi_1$ și $M \models \psi_2$. Așadar, prin inducție $M' \models \psi_1$ și $M' \models \psi_2$, și deci $M' \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$, adică $M' \models \varphi$, q.e.d.

Dar orice propoziție din Δ este pozitivă și, în plus, e adevărată în M . Atunci $M' \models \varphi$ pentru orice propoziție φ din Δ , adică $M' \models \Sigma$. Însă, conform lui (5.9), orice model al lui Δ este model și al lui Σ , deci M' e model al lui Σ – și deci această teorie este crescătoare.

2) Suficiența. Să presupunem că Σ este o teorie consistentă și crescătoare. Fie Δ mulțimea tuturor consecințelor ei pozitive. Vom arăta că Δ are aceleași modele ca și Σ și, deci, că este o mulțime de axiome pozitive pentru Δ .

a) Orice model al lui Σ este și model al lui Δ . Acest fapt este trivial adevărat, propozițiile din Δ fiind consecințe ale lui Σ .

b) Orice model al lui Δ este și model al lui Σ . Fie deci M' un model al lui Δ și fie Γ mulțimea propozițiilor $(-\varphi)$ astfel încât φ este pozitivă și $M' \models (-\varphi)$. Să luăm n propoziții $(-\varphi_1), \dots, (-\varphi_n)$ din Δ . Atunci putem construi propoziția

$$\psi = (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \dots \vee \varphi_n) \dots)$$

Dar ψ nu e adevărată în M' . Prin urmare, ψ nu aparține lui Δ și deci nu este o consecință a lui Σ . Ca urmare, mulțimea $\Sigma \cup \{(-\varphi_1), \dots, (-\varphi_n)\}$ este realizabilă. Atunci ea este, conform teoremei de compactitate, finit realizabilă. Însă mulțimea $\{(-\varphi_1), \dots, (-\varphi_n)\}$ este o submulțime oarecare finită a lui Γ . Așadar, $\Sigma \cup \Gamma$ este finit realizabilă. Prin teorema de compactitate, ea este realizabilă. Fie M un model al ei. În M este falsă orice propoziție pozitivă care este falsă în M' . Adică, dacă φ este o propoziție pozitivă și nu e adevărat că $M' \models \varphi$, atunci nu e adevărat că $M' \models \varphi$. Ceea ce e tot una cu a spune că dacă $M' \models \varphi$, atunci $M'' \models \varphi$, pentru orice propoziție pozitivă φ .

Să arătăm acum că $M \subseteq M'$. Într-adevăr, să ne amintim că literele propoziționale sunt propoziții pozitive. Atunci, dacă φ este o literă propozițională și $M \models \varphi$, avem $\varphi \in M$. Dar avem și $M' \models \varphi$, deci $\varphi \in M'$. Așadar, $M \subseteq M'$. Însă Σ este o teorie crescătoare, deci $M' \models \Sigma$. Astfel, presupunând că M' e un model al lui Δ , am arătat că este și model al lui Σ , q.e.d.

*
* * *

În paragrafele anterioare am formulat *teoria modelelor* pentru logica propozițiilor. Această teorie logică este foarte simplă, în comparație cu, de exemplu, teoria modelelor pentru logica predicatelor. Dar ea permite să formulăm unele teoreme precum cea de completitudine, cea de compactitate sau a lui Craig care – după cum vom vedea – au un rol foarte important în cercetarea diverselor logici.

§ 6. Exerciții

1. Formalizați următoarele expresii în logica propozițiilor. De fiecare dată încercați să păstrați cât mai mult structura inițială a acestor expresii, și dați întotdeauna cheia notărilor folosite.

- a) Mașina nu face mult zgomot, dar consumă foarte multă energie.
- b) Nu-i adevărat că va veni la petrecere și Ion, dacă vine Maria.
- c) Această scrisoare nu a fost scrisă nici cu stiloul și nici cu creionul.
- d) Nu-i adevărat că sârbii sunt vinovați, iar croații nu.
- e) Nimeni nu a râs sau aplaudat.
- f) Cu voia Domnului, va fi pace.
- g) Dacă atât mama cât și tata ies la plimbare, voi merge și eu, dar voi merge chiar dacă numai mama iese să se plimbe.
- h) Nu cred că aceasta a fost intenția ta, dar dacă e așa, nu sunt de acord cu tine.
- i) Dacă în timpul ploii e soare, atunci va apare curcubeul.

2. Sunt valide următoarele raționamente?

- a) Dacă el se înscrie în concurs și va alerga cât poate de repede, atunci, chiar dacă nu va ieși pe primul loc, va obține totuși un record personal; dar dacă nu va alerga cât poate de repede, nu va obține un record personal. Prin urmare, dacă se va înscrie în concurs însă nu va obține un record personal, înseamnă că nu a alergat cât se poate de repede.
- b) E fals că, dacă aș avea diabet, lucrul acesta m-ar face fericit. Așadar, am diabet.
- c) Dacă Dumnezeu nu poate preveni răul, înseamnă că nu e atotputernic. Iar dacă îl poate preveni, însă nu o face, înseamnă că nu este pe deplin bun. Or, Dumnezeu e atât atotputernic, cât și pe deplin bun. Prin urmare, răul nu există.

3. Fie următoarele două propoziții:

- a) Nu voi întârzia de la întâlnire dacă nu voi avea vreo ședință iar tramvaiul va veni la timp.
- b) Nu voi întârzia de la întâlnire numai dacă nu voi avea vreo ședință, iar tramvaiul va veni la timp.

Arătați care dintre ele decurge logic din propoziția:

Dacă voi întârzia, înseamnă că voi avea o ședință sau cel puțin că tramvaiul nu va veni la timp.

4. Trei indivizi, A , B și C , sunt cercetați în legătură cu comiterea unei infracțiuni. Ei declară următoarele:

- a) A : B este vinovat, dar C este nevinovat.
- b) B : Dacă A este vinovat, atunci și C este vinovat.
- c) C : Eu nu sunt vinovat, dar cel puțin unul din ceilalți doi e vinovat.

Încercați să determinați:

- a) dacă cele trei declarații pot fi adevărate împreună;
- b) dacă nu cumva una din cele trei declarații decurge logic din alta;

c) care dintre cele trei declarații e mincinoasă, dacă toți trei suspecți sunt vinovați;

d) care dintre cei trei suspecți este vinovat, dacă toate cele trei declarații sunt adevărate.

5. Arătați că următoarele expresii sunt valide:

a) $\varphi \rightarrow \varphi$ (legea identității)

b) $\neg \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (din fals decurge orice)

c) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ (adevărul decurge din orice)

d) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ (legea lui Peirce)

e) $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg \varphi \vee \neg \psi)$ (legea lui de Morgan)

f) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

6. Demonstrați expresiile de mai sus în sistemul axiomatic (Σ, R) .

7. Arătați că două propoziții, φ și ψ , sunt logic echivalente dacă și numai dacă ele au aceeași valoare de adevăr în orice model.

8. O mulțime K de conective logice se numește *completă* dacă se poate arăta că orice formulă φ este logic echivalentă cu o formulă ψ în care nu apar decât conectivele logice din K . Arătați că următoarele mulțimi de conective logice sunt complete:

a) $\neg, \vee$,

b) $\neg, \rightarrow$

c) $\neg$,

d) $\neg, \rightarrow$

e) $/$

Conectivul logic „ $/$ ” se definește cu ajutorul următorului tabel de adevăr.

φ	ψ	φ / ψ
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

9. Un conectiv logic binar f se numește *conservativ* dacă $f(\varphi, \psi) = f(\varphi, \varphi \wedge \psi)$

Determinați care sunt conectivele logice conservative.

10. O propoziție φ este strict realizabilă dacă și numai dacă atât φ cât și negația ei sunt realizabile. Arătați că φ este strict realizabilă dacă și numai dacă $\neg \varphi$ este strict realizabilă.

11. Demonstrați următoarele afirmații:

a) Dacă $\varphi \rightarrow \psi$ este nerealizabilă, atunci φ este validă și ψ este nerealizabilă;

- b) $\varphi \wedge \psi$ este validă dacă și numai dacă atât φ cât și ψ sunt tautologii.
12. Dați un exemplu de propoziție care nu satisface următoarea condiție:
Dacă $\varphi \vee \psi$ este validă, atunci φ este validă sau ψ este validă.
13. Se numește *judicata* corespunzătoare unei propoziții φ mulțimea Φ a modelelor în care φ este adevărată.
- a) să se determine judicata corespunzătoare unei propoziții valide;
b) să se determine judicata corespunzătoare unei propoziții nerealizabile.
14. Date fiind judecățile Φ și Ψ corespunzătoare propozițiilor φ , respectiv ψ , să se determine judecățile corespunzătoare propozițiilor:
- a) $\neg \varphi$
b) $\varphi \wedge \psi$
c) $\varphi \vee \psi$
15. Să se arate că structura: $\langle J, \subseteq, \cap, \cup \rangle$ unde J este mulțimea judecăților corespunzătoare propozițiilor unui limbaj $L(S)$, iar $\subseteq, \cap, \cup$ sunt complementara, intersecția și reuniunea de mulțimi, este o algebră booleană.
16. Câte propoziții are limbajul $L(S)$ atunci când S este:
- a) finită;
b) infinită numărabilă;
c) infinită nenumărabilă?
17. Să se demonstreze propozițiile:
- a) (2.4)
b) (2.5)
c) (2.6)
18. Câte modele are un sistem formal $L(S)$? (să se cerceteze cazurile când S este a) finită; b) infinită numărabilă).
19. Să se arate că o propoziție φ este realizabilă dacă și numai dacă $\neg \varphi$ nu este validă.
20. Să se arate că dacă propoziția φ este realizabilă și $L(S)$ este numărabilă, atunci mulțimea modelelor lui φ este nenumărabilă.
21. Să se completeze definiția (3.3) a valorii lui φ pentru atribuirea $a_0, \dots, a_n$ în cazul conectivelor logice $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
22. Să se arate că:
- a) dacă φ este demonstrabilă în sistemul axiomatic (Σ, R) , atunci pentru orice atribuire $a_0, \dots, a_n$, valoarea lui φ este t .
b) dacă valoarea lui φ pentru orice atribuire $a_0, \dots, a_n$ este t , atunci φ este demonstrabilă în sistemul (Σ, R) .
23. Să se demonstreze că $\varphi \vdash \varphi$ dacă și numai dacă φ este tautologie.

24. Să se demonstreze propoziția (4.9.5), punctele (b) – (e).
25. Să se demonstreze propoziția (5.4).
26. Să se arate că nici o mulțime de modele cu un singur element nu este elementară.
27. Să se arate că mulțimile de modele cu un singur element sunt elementare în sens larg.
28. Să se arate că toate mulțimile finite de modele sunt elementare în sens larg.
29. Să se dea un exemplu de mulțime de modele care să fie infinită și să nu fie elementară în sens larg.
30. Să se arate că dacă o mulțime Σ de propoziții are exact un model, atunci este completă.
31. Să se demonstreze propoziția (5.1.3).
32. Demonstrați, cu ajutorul teoremei lui Craig, că dacă propozițiile ϕ și ψ nu au nici o literă propozițională în comun, atunci $\phi \vee \psi$ este validă dacă și numai dacă ϕ este validă sau ψ este validă.

C a p i t o l u l I I

PROPOZIȚII ȘI JUDECĂȚI

§ 7. Propozițiile ca purtători ai adevărului

Vom aborda, în acest paragraf, mai în detaliu, o distincție propusă în § 5: cea dintre propoziții și judecăți.

În capitolul I, pentru a construi semantica, am acceptat – fără însă a și justifica această alegere – că predicatul „adevărat” se aplică *propozițiilor*; propozițiile sunt purtătorii adevărului. Potrivit definiției (3.2), fiind dat un model M , predicatul „adevărat” urmează să fie aplicat propozițiilor; nici o altă entitate nu este adecvată în același scop. Propozițiile sunt constructe lingvistice: ele sunt fie membri ai lui S , fie constructe realizate prin aplicarea (de un număr finit de ori) a operațiilor logice asupra unor propoziții mai simple (cf. (2.2)).

Să încercăm să privim această chestiune într-o manieră ceva mai generală. Ne vom raporta mai întâi la propozițiile din *limba naturală*, iar apoi vom încerca să vedem ce putem reda din distincțiile făcute, în raport cu un limbaj formal (prezentat atât sintactic, cât și semantic), precum este $L(S)$.

Fie propoziția:

(7.1) Ușa este închisă.

Ea este un construct lingvistic: un șir format din trei cuvinte ale limbii române – „ușa”, „este” și „închisă”. Să luăm alte două propoziții:

(7.2) Ion este a treia persoană de pe listă.

(7.3) Ușa este închisă.

Ceea ce frapază cu aceste două noi exemple e că, de fapt, (7.3) e aceeași propoziție cu (7.1) și, deci, nu e o propoziție nouă. Totuși, într-un sens e vorba de două propoziții: una notată cu „(7.1)”, alta notată „(7.3)”. Însă, se va răspunde, e vorba de aceeași propoziție, fiindcă ele se compun din aceleași trei cuvinte: „ușa”, „este” și „închisă”. Or, se va putea observa din nou că, de pildă, cuvântul „ușa”, care apare în (7.1) e totuși altul decât cuvântul „ușa” care apare în

(7.3); că e așa se vede imediat ce notăm că al doilea cuvânt e scris câteva rânduri mai jos decât primul.

Dificultatea se poate rezolva simplu, desebind între 1) un semn-gen și 2) un semn-individual. Astfel avem cuvântul-gen: „ușa” și cuvintele-individuale „ușa”, care apare în (7.1), și „ușa”, care apare în (7.3); în mod analog, avem propoziția-gen „Ușa este deschisă” și propozițiile-individuale (7.1) și (7.3). Distincția aceasta vine de la C. S. Peirce: după el, pronunțarea și scrierea unui cuvânt sau unei propoziții sunt semne-individuale (*tokens*) ale expresiei lingvistice avute în vedere; iar această expresie lingvistică este de semnul-gen (*type*) al acelei pronunțări ori scrieri ale acelei expresii. Tot așa, în limbajul nostru formal $L(S)$, dacă scriem expresia:

$$(7.4) (p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$$

în aceasta avem două apariții ale propoziției-gen p – deci două propoziții-individuale de gen p . De asemenea, (7.4) și

$$(7.5) (p \vee ((p \vee q) \rightarrow r))$$

sunt două propoziții-individuale de același gen. În cele ce urmează voi scrie simplu „propoziție” pentru „propoziție-gen”; în acest sens, de altfel, am folosit acest cuvânt și până în prezent. Așadar, o propoziție este un *universal*: un șir repetabil de sunete sau inscripții grafice.

Putem acum să reformulăm punctul de vedere adoptat în paragrafele anterioare, pe baza lui (3.2): adevărul este o proprietate a propozițiilor-gen, sau – mai simplu zis – a propozițiilor. Or, cel puțin atunci când avem în minte propozițiile dintr-o limbă naturală – din limba română, în particular – se vede cu ușurință că o asemenea alegere nu merge pe deplin bine. Într-adevăr, propoziția „Ușa este închisă” este adevărată pentru un om care, să zicem, privește la o ușă închisă și folosește această propoziție pentru a spune ceva despre ușa pe care o privește, dar poate desigur să fie falsă pentru altcineva. Însă nu putem să admitem că una și aceeași propoziție este atât adevărată cât și falsă.

Două soluții ale acestei dificultăți sunt imediate:

1) Să se presupună că purtătorii adevărului nu sunt propozițiile, ci propozițiile-individuale; adevărul nu e o proprietate a propoziției „Ușa este închisă”, ci, de exemplu, ale lui (7.1) și (7.3). Ei i se pot aduce mai multe obiecții:

a) O propoziție poate să fie pronunțată ori scrisă o dată, de mai multe ori, sau niciodată. Existența ei nu este compromisă de faptul că, să zicem, nimeni nu a pronunțat-o ori a scris-o vreodată (deci, de faptul că nu există nici o propoziție-individuală de genul ei). Acum, să presupunem o situație în care un om privește o ușă închisă, dar nu pronunță ori scrie o propoziție-individuală „Ușa este închisă”. În acest caz nu există nici o entitate – o propoziție-individuală – despre care să putem afirma că este adevărată sau falsă; însă noi vrem totuși

să spunem că acea ușă, pe care o privește acel om, este închisă: vrem totuși să spunem că, în acea situație, propoziția „Ușa este închisă” e adevărată. Așadar, trebuie să se dea seamă de cazurile când propoziția nu e pronunțată ori scrisă de omul respectiv, la momentul respectiv (Quine).

b) Să presupunem că propoziția „Ușa este închisă” este pronunțată atunci și numai atunci când e pronunțată propoziția „Afară plouă” și că, mai mult, propozițiile-individuale de primul gen sunt adevărate atunci și numai atunci când sunt adevărate propozițiile-individuale de al doilea gen. În acest caz, nu am avea cum să deosebim între cele două genuri de propoziții-individuale.

c) Tot așa, nu am avea cum să deosebim între propozițiile care nu ar fi pronunțate niciodată (Quine).

2) O a doua soluție, propusă de Quine, e aceea de a lua ca purtători ai adevărului propozițiile eterne. Am văzut că o propoziție-gen precum „Ușa este închisă” poate spune, în contexte diferite, lucruri diferite. Contextul este cel care selectează despre ce ușă este pronunțată propoziția și când e aceea închisă; așadar, contextul vizează: a) locul; b) timpul. Două propoziții-individuale, de același gen, dar pronunțate relativ la contexte diferite, pot să aibă valori de adevăr diferite; dar dacă sunt pronunțate relativ la același context, ele vor avea aceeași valoare de adevăr. Quine propune ca, ori de câte ori avem o propoziție și un context, să producem o nouă propoziție, în care e încorporat contextul. De pildă, plecând de la propoziția „Ușa este închisă”, se construiește propoziția:

(7.6). Ușa aflată în locul *a* este închisă pe momentul *t*.

Propoziția (7.6), spre deosebire de propoziția „Ușa este închisă”, are următoarea trăsătură caracteristică: valoarea ei de adevăr rămâne neschimbată, oricare ar fi timpul la care a fost pronunțată și oricare ar fi persoana care o pronunță. O propoziție care posedă această trăsătură este numită de Quine *propoziție eternă*. Quine propune să luăm astfel de propoziții ca purtători ai adevărului.

Quine consideră că strategia sa 1) este fezabilă; și 2) are multiple avantaje. Mai întâi, el consideră că ori de câte ori avem o propoziție pe care vrem să o tratăm ca având înțeles, putem să construim o propoziție-eternă care să îi corespundă; de asemenea, întotdeauna putem identifica contextul care ne permite acest lucru*. Avantajele acestei proceduri sunt următoarele:

a) Purtătorii adevărului sunt recunoscuți ca fiind obiecte materiale pe care le putem manevra într-un mod riguros.

* În *Word and Object*, § 45, Quine menționează totuși dificultățile ce apar pe acest drum odată ce avem în vedere *atitudinile propoziționale* (de forma: eu cred că ușa este închisă).

b) Nu e nevoie să se considere că o propoziție își schimbă valoarea de adevăr. Dacă cineva spune – plecând de la anumite date disponibile – că o propoziție eternă e adevărată, dar – când alte date îi vin la îndemână – spune că aceasta e falsă, ceea ce se întâmplă *nu* e schimbarea valorii de adevăr a propoziției, ci schimbarea atitudinii sale față de ea, în lumina noilor date.

c) Propozițiile eterne nu sunt foarte puțin răspândite, cum s-ar părea. Apelul la ele se bazează deci pe o procedură destul de utilizată. Astfel, propozițiile teoretice din matematică și din alte științe sunt eterne; datele empirice, predicțiile referitoare la evenimente singulare sunt tot propoziții eterne (data, timpul, locul, persoanele implicate sunt indicate într-un mod obiectiv – și nu sunt lăsate să varieze, prin folosirea unor descriții incomplete, a unor cuvinte precum „aici“, „acum“ etc., ori a unor prenume ale persoanelor).

Cu toate acestea, strategia lui Quine întâmpină câteva dificultăți grave:

a) Distincția dintre propozițiile eterne și cele care nu sunt astfel e greu de făcut făcând apel la forma lingvistică și chiar logică a propozițiilor. De pildă, fie propoziția

(7.7) Pământul e a treia planetă de la Soare.

Data fiind stabilitatea sistemului nostru solar, această propoziție exprimă o propoziție a cărei valoare de adevăr nu se schimbă de la o generație la alta și nici relativ la persoane diferite și poate fi, deci, considerată o propoziție eternă. Dar să luăm propoziția

(7.2) Ion este a treia persoană de pe listă.

Forma lui (7.7) e (cel puțin aparent) aceeași cu a lui (7.2). Și totuși, este evident că (7.2) nu e o propoziție eternă: valoarea ei de adevăr se schimbă în funcție de circumstanțele în care e pronunțată. Care este acel Ion despre care se vorbește, și care e lista cu pricina? Apoi, dacă Ion este un om norocos, s-ar putea ca în timp să avanseze pe listă etc. Așadar, nu putem deosebi propozițiile eterne pe baza formei lor.

b) Apelul la propoziții eterne este de bună seamă convenabil atunci când avem a face cu propoziții din științele teoretice; dar, atunci când în propozițiile noastre apar expresii precum „aici“, „acum“, „eu“, „acesta“ e greu să le abandonăm în favoarea unor propoziții eterne. Quine sugerează următoarea procedură: plecând de la propoziția

(7.8) Acum este senin în București,
să se înlocuiască expresia „acum“ cu o descriere obiectivă a momentului. Bunăoară, din (7.8) am obține propoziția eternă:

(7.9) În ziua de 26 februarie 1994 ora 12 este senin în București.

Problema este că (7.8) nu spune același lucru. Că este așa se vede imediat ce luăm propoziția:

(7.10) Fiul meu știe că acum este senin în București.

Dacă (7.8) ar spune același lucru cu (7.9), ar trebui ca înlocuind în această propoziție expresia „acum” cu „în ziua de 26 februarie 1994, ora 12” să obținem o propoziție cu aceeași valoare de adevăr. Să presupunem că fiul meu a pronunțat propoziția (7.10) în ziua de 26 februarie 1994 la ora 12 și că a pronunțat-o după ce s-a uitat pe cer și a văzut că e senin; așadar, (7.10) e adevărată. Însă

(7.11) Fiul meu știe că în ziua de 26 februarie 1994, ora 12 este senin în București,

nu e neapărat adevărată – de exemplu pentru că, să zicem, el a avut o mică amnezie și a uitat că acea amiază senină era în ziua de 26 februarie 1994. Așadar, expresii precum „aici”, „acum”, „eu” etc. nu pot fi eliminate cu ușurință pentru a produce propoziții eterne.

c) O propoziție ca (7.9) este, după Quine, o propoziție eternă. Însă – strict vorbind – nu este așa. Căci stabilirea zilei ca fiind 26 februarie 1994 e făcută relativ la anumite convenții, iar stabilirea locului e făcută tot așa. E greu să admitem că există un sistem de referință absolut în raport cu care să putem spune că am produs o propoziție eternă în sens absolut. Dar, se va obiecta, o atare exigență este prea tare. Nu e nevoie să determină locul în raport cu o poziție absolută; pentru nevoile noastre, poziția stabilită cu ajutorul longitudinii și latitudinii pe Pământ este suficientă; tot așa, era gregoriană e suficientă pentru a determina timpul pentru cele mai multe din propozițiile pe care le folosim. Căci astfel toate pronunțările lui (7.9) vor putea fi înțelese ca având fixată valoarea de adevăr. Problema este însă că astfel vom putea tot așa de bine să alegem și sisteme de referință mai restrânse – de pildă, am putea susține că o propoziție ca:

(7.12) Regele Franței este înțelept.

este eternă, dacă am presupune că ea e pronunțată numai în timpul domniei lui Ludovic al XIV-lea. La limită, am putea cere chiar ca (8.1) să fie eternă, dacă am admite că ea să fie pronunțată numai relativ la o anumită ușă și la un anumit timp (pentru alte uși, ori pentru aceeași ușă la alte momente am urma să folosim alte propoziții, spre a transmite aceeași informație).

d) În sfârșit, dacă am lucra numai cu propoziții eterne, construcția unei teorii a modelelor ar întâmpina dificultăți sporite. Mai întâi, ar fi greu de spus în ce sens o propoziție precum (7.6): Ușa aflată în locul a este închisă în momentul t , ar putea fi adevărată într-un model și falsă într-altul dacă nu am accepta că, în modele diferite, înțelegem prin a și prin t locuri, respectiv momente de timp diferite; or, introducerea locului și a timpului în propoziție – spre a produce o propoziție eternă – avuseseră ca scop tocmai înlăturarea posibilității

de variere a contextului care face adevărată ori falsă propoziția, deci tocmai păstrarea fixată a unui loc și a unui timp.

În al doilea rând, e greu de precizat ce se înțelege prin context. De pildă, am spus că se poate ca o propoziție p să fie adevărată într-un model M și falsă într-un model M' . Potrivit procedurii lui Quine, ar trebui ca specificarea unui model să reprezinte o parte a contextului (sau contextul însuși, în cazul $L(S)$) în care vrem să spunem că o propoziție p este adevărată. Plecând de aici, am putea – pentru orice p – să construim o propoziție eternă „ p în M ”. Dar care e comportamentul acestei noi propoziții? Unii filosofi au argumentat că ea are aceeași valoare de adevăr în orice model. Căci, dacă e adevărată într-un M' , atunci va trebui să fie adevărată în toate modelele – iar dacă e falsă într-un M' , atunci va trebui să fie falsă în toate modelele. Prin urmare, dacă ar trebui să abandonăm toate propozițiile de forma p în formarea unora de forma p în M , atunci ar trebui să admitem că în toate modelele sunt adevărate aceleași propoziții. În cazul modelelor pentru $L(S)$ – și, subliniez, în *acest* caz! căci generalizarea nu e posibilă – decurge că $L(S)$ ar urma să aibă un singur model.

§ 8. Conceptul de judecată

Așadar, nici propozițiile, nici propozițiile-individuale și nici propozițiile-eternale nu par să fie candidați potriviți pentru a fi considerați ca purtători ai adevărului. Dificultăți de genul celor menționate i-au condus pe mulți filosofi spre o altă opțiune: aceea de a lua drept purtători ai adevărului entități de un alt gen, numite *judecăți**. Ce sunt judecățile? Ele sunt *obiecte abstracte* – deci nu sunt nici obiecte lingvistice (precum propozițiile-individuale și propozițiile-tip), nici clase de propoziții (individuale). În al doilea rând, zicem că o propoziție (individuală sau tip) *exprimă* o judecată. Judecata este ceea ce exprimă o propoziție.

Din cele zise până acum nu decurge însă exact ce este o judecată. Opțiunile în acest sens sunt încă deschise. Una dintre ele – asupra căreia mă voi opri mai pe larg, fiindcă s-a aflat în centrul discuțiilor despre judecăți – este următoarea: *o judecată este înțelesul unei propoziții*. Cu aceasta se poate spune că o propoziție exprimă acum o judecată, altă dată o altă judecată etc. Fiecare propoziție-individuală este luată ca exprimând o judecată (dacă propoziția este eternă, ea va exprima mereu aceeași judecată). Când folosim limbajul, ceea ce variază de la context la context este judecata pe care o exprimă o propoziție, nu valoarea de adevăr

*Deosebirea dintre propoziții și judecăți e răsfrângerea în românește a celei din limba engleză, dintre *sentence* și *proposition*. În românește s-a încercat să se traducă termenul „*proposition*” în mai multe feluri, de ex., ca *propoziție* ori *ppropoziție*. Prefer să scriu *judecată*, chiar dacă termenul acesta în mod obișnuit e luat ca aplicându-se propozițiilor categorice.

a propoziției. Judecățile sunt adevărate sau false. Ele rămân neschimbate în privința valorii lor de adevăr, fără legătură cu contextul utilizării limbajului; nu contează care e persoana care le exprimă folosind limbajul, nu contează când sunt ele exprimate. Ceea ce ține de context e altceva: care sunt propozițiile-individuale care sunt selectate pentru a exprima acele judecăți. Cum zice Quine¹: „înțelesurile propozițiilor sunt luate ca entități abstracte de sine stătătoare, sub numele de *judecăți*. Acestea – și nu propozițiile însele – sunt privite ca lucrurile care sunt adevărate sau false. De asemenea, ele sunt lucrurile care stau în relația de implicație logică; ele sunt lucrurile care, de asemenea, sunt cunoscute sau crezute sau nu sunt crezute și care se dovedește că sunt evidente sau surprinzătoare”. Judecățile sunt tratate, așadar, drept *susțineri despre lume*, genul de lucruri care sunt afirmate de o propoziție (individuală).

Vom cerceta următoarele probleme legate de judecăți: ce motive au avut filosofi pentru a le postula; care sunt avantajele tratării judecăților ca purtători ai adevărului; ce obiecții se pot aduce acestei opțiuni; dacă e posibilă depășirea acelor obiecții.

După Quine², patru au fost motivele care i-au determinat pe filosofi să accepte judecățile ca entități abstracte:

1. Judecățile pot funcționa ca purtători ai adevărului; adevărate nu pot fi propozițiile, ci susținerile despre lume pe care le facem prin intermediul acestora – așadar judecățile.

2. Judecățile funcționează drept constante în traduceri. Când traducem propoziția „The snow is white” prin propoziția „Zăpada este albă”, presupunem că cele două propoziții au ceva în comun. Acest ceva comun este judecata pe care ambele o exprimă – anume susținerea că zăpada este albă.

3. Judecățile funcționează drept constante în analiza filosofică. Atunci când analizăm o propoziție, aceasta (*analysandum*) și propoziția în care a fost analizată (*analysans*) trebuie să admitem că au ceva în comun. Când Russell propunea să analizăm o propoziție precum (8.1): Regele Franței este înțelept, în conjuncția următoarelor trei propoziții:

(8.1 a) Există un rege al Franței.

(8.1 b) Nu există doi regi ai Franței.

(8.1 c) Dacă cineva este rege al Franței, atunci este înțelept, el ne invita să admitem că cele două propoziții – (8.1) și conjuncția propozițiilor (8.1 a) – (8.1 c) – exprimă aceeași susținere despre lume; altminteri nu s-ar mai putea spune că a doua e o analiză a primeia.

¹ *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970, p. 2.

² W. v. O. Quine, *Word and Object*, p. 206.

4. Judecățile sunt obiecte ale atitudinilor propoziționale. Să considerăm, de pildă, propoziția:

(8.2) Ion crede că ușa este închisă.

Această propoziție formulează ceea ce se numește o *atitudine propozițională*. Ea formulează o atitudine a lui Ion: aceea că el crede ceva; alte atitudini ale sale ar putea fi: el vrea ceva, el știe ceva, el presimte ceva, el susține ceva, el caută ceva etc. Atitudinea lui Ion este propozițională, căci după clauza „că” urmează o *propoziție*. Problema este acum aceea de a spune ce este relația de *a crede* (mai pe scurt, forțând puțin limba: relația de *crezare*). Aparent, aceasta e o relație între Ion și propoziția ce urmează clauzei „că”, în cazul nostru între Ion și propoziția „Ușa este închisă”. Dar nu poate fi vorba de o propoziție-tip, aflată în relația de crezare cu Ion; căci trebuie specificat care este ușa despre care Ion crede că e închisă. În acest caz însă, ar trebui ca (8.2) să fie înlocuită cu ceva de genul:

(8.3) Ion crede că ușa aflată în locul *a* este închisă la momentul *t*.

Acum, după clauza „că” apare o propoziție-individuală. Or, se poate vedea cu ușurință că nici aceasta nu e o alegere fericită. Să presupunem că *a* este sala 216 din Facultatea de Filosofie a Universității București. Dar, așa cum știm, această sală este sediul Catedrei de Filosofie a Universității București; și, deși (8.3) e adevărată, s-ar putea ca Ion să nu fie de acord cu faptul că ușa Catedrei de Filosofie a Universității București e închisă la momentul *t*, fiindcă el nu știe că sala 216 e totuna cu sediul Catedrei de Filosofie. Dar propozițiile

(8.4) Ușa sălii 216 din Facultatea de Filosofie a Universității București este închisă la momentul *t*.

(8.5) Ușa Catedrei de Filosofie a Universității București e închisă la momentul *t*.

au întotdeauna aceeași valoare de adevăr (cel puțin atâta vreme cât nu se schimbă numerotarea sălilor ori sediul Catedrei de Filosofie). Or, relația de crezare dintre Ion și (8.4) are loc, nu însă și dintre Ion și (8.5). Concluzia e deci că relația de crezare nu e o relație între persoane și propoziții-individuale. Atunci se poate proceda altfel: să se admită că relația de crezare este o relație între o persoană și *ceea ce aceasta crede*; ca obiect al crezării persoanei este o judecată – anume susținerea pe care, atunci când crede ceva, acea persoană o face despre lume.

Celor patru motive de a introduce judecățile ca un tip de entități, pe care le numește Quine, le-am mai putea adăuga unul. Acesta e mai general, sub el căzând unele dintre cele amintite până acum. Argumentul curge astfel: putem folosi o propoziție-tip în mai multe feluri. Bunăoară, fie propoziția: „Bătălia de la Mărășești a avut loc în 1917”. Eu pot:

(i) să *asertez* această propoziție, atunci când vreau să comunic data corectă cuiva care nu știe când a avut loc bătălia de la Mărășești;

(ii) să folosesc această propoziție în mod *condițional*, deci fără a o aserta, de pildă în: Dacă bătălia de la Mărășești a avut loc în 1917, atunci sigur bunicul meu nu a participat la ea" (fiindcă eu știu că el nu a luptat pe front în 1917);

(iii) să folosesc această propoziție în mod *interogativ*, atunci când, de pildă, întreb: „A avut loc bătălia de la Mărășești în 1917?”;

(iv) să îmi exprim o *opinie*, când zic: „Eu cred că bătălia de la Mărășești a avut loc în anul 1917”;

(v) să emit o *ipoteză*, care urmează a fi testată: „Bătălia de la Mărășești a avut loc în anul 1917”;

(vi) în genere, o propoziție poate fi folosită pentru a *ordona* ceva, pentru a *promite* ceva, pentru a formula o condiție *contrafactuală* etc. Nu toate propozițiile sunt potrivite pentru aceste folosiri; de exemplu, cea pe care am considerat-o nu poate fi utilizată în modurile numite aici. Dar altele pot, bunăoară propoziția: „Andrei se culcă la ora 10 seara”. Ea poate fi folosită pentru a ordona ceva: „Andrei, culcă-te la ora 10 seara”, pentru a-i promite ceva: „Dacă te culci la ora 10 seara, atunci îți promit că mâine te las să mergi la film” sau contrafactual: „Dacă Andrei s-ar culca la ora 10 seara, atunci ar fi odihnit dimineața” etc.

Aceste situații ne permit să facem o distincție între *sensul* sau *înțelesul* unei propoziții și *forța* ei. Înțelesul propoziției este ceea ce e gândit, ceea ce e înțeles atunci când folosim o expresie; dar propoziția este pronunțată cu o anumită forță – cu o forță asertivă, cu una interogativă, cu una condițională ș.a.m.d. Distincția aceasta vine de la Frege. El a deosebit între a) *conținutul* unei propoziții, sau gândul exprimat de ea; și b) faptul că acea propoziție este afirmată sau nu. Fie o propoziție φ ; pentru a formula faptul că ceea ce e avut în vedere e conținutul ei, Frege scria:

– φ

Pentru a formula faptul că propoziția e asertată, el scria:

⊢ φ

Asertarea e un caz special al *forței* cu care e folosită o propoziție. Frege nu a generalizat noțiunea utilizată la punctul b), dar pe distincția sa s-a clădit distincția mai generală între sens (înțeles) și forță.

E ușor de văzut în ce constă pasul următor: înțelesul unei propoziții e judecata pe care aceasta o exprimă; așadar, distincția avută în vedere e cea dintre 1) judecata exprimată de o propoziție; și 2) forța cu care e utilizată acea propoziție. Desigur, forța cu care utilizăm o propoziție se poate schimba; dar ceva trebuie să rămâne neschimbat; altminteri cum am putea să admitem

că atunci când afirmăm, întrebăm, considerăm, permitem, ordonăm etc. ceva, noi avem în minte același lucru pe care îl afirmăm, întrebăm etc. Judecățile sunt constantele căutate; introducându-le ca entități, putem explica de ce putem proceda astfel.

Să notăm că acest motiv e mai tare decât unele dintre cele numite de Quine: căci 1) asertarea unei propoziții (pentru a face o susținere despre lume) e un tip de forță; 2) folosirea unei propoziții ca *analysans* sau *analysandum* e un tip de forță; 3) exprimarea unei atitudini propoziționale – „eu cred că”, „eu vreau să” – e de asemenea un tip de forță.

G. P. Baker și P. M. S. Hacker rezumă astfel distincția dintre sens (înțeles) și forță:

(i) Orice propoziție-tip are atât un înțeles cât și o forță, adică atât o „componentă care exprimă înțelesul”, cât și un „indicativ al forței”.

(ii) Forța unei propoziții determină (cel puțin parțial) ce *act de vorbire* e realizat prin pronunțarea acestei propoziții, de pildă dacă e pusă o întrebare, dacă e făcută o afirmație ori dacă e formulată o ipoteză.

(iii) Au forță numai propozițiile-tip *complete*. (O jumătate de propoziție nu poate fi folosită pentru a realiza nici un astfel de act de vorbire).

(iv) Există un *grad înalt de libertate* în combinarea înțelesurilor cu forțele. Absolut orice înțeles poate fi atașat unei forțe date, și absolut orice forță poate fi legată cu un anumit înțeles. În particular, oricare înțeles poate fi înzestrat cu o forță asertivă. (Echivalent zis: există o mare latitudine în combinarea „componentelor care exprimă înțelesul” cu „indicatorii forței”).

(v) Înțelesul unei propoziții este purtătorul adevărului.

Aceste cinci motive sunt îndeajuns de puternice pentru a introduce judecățile ca entități. În cele ce urmează mă voi opri însă numai asupra primului dintre ele. Două sunt rațiunile: pe de o parte, acesta e cel care a motivat abordarea de față. Pe de altă parte, se ridică o problemă: cum putem fi siguri că cele patru motive de a introduce judecățile sunt motive pentru a introduce același soi de entități? Bunăoară, trebuie argumentat că aceste entități pe care le postulăm atunci când pronunțăm propoziția (8.4. a) și despre care afirmăm că este adevărată este exact *aceeași* entitate cu cea pe care o postulăm, analizând propoziția

(8.5) Ion crede că ușa Catedrei de Filosofie e Universității București este închisă la momentul *t*.

ca stând în relația de crezare cu Ion. Rezumându-ne la primul motiv, evităm problema dacă purtătorii adevărului sunt entități de același soi cu obiectele atitudinilor propoziționale ori cu constantele în traducere sau în analiză.

¹ G. P. Baker și P. M. S. Hacker, *Language, Sense and Nonsense*, Blackwell, London, 1986, p. 49. Am tradus peste tot *sense* cu „înțeles”.

Vom trece acum la a doua chestiune privitoare la judecăți: care sunt avantajele tratării lor ca purtători ai adevărului.

1. Apelul la judecăți ca purtători ai adevărului permite să susținem că adevărul nu este o proprietate pe care acea entitate care o posedă sau o poate pierde funcție de context – funcție de persoana care o exprimă ori locul și momentul în care o persoană o exprimă. De aceea, judecățile sunt mai potrivite decât propozițiile-tip pentru a fi luate ca purtători ai adevărului.

2. Judecățile sunt, pe de o parte, îndeajuns de fin specificate pentru a permite să diferențiem între susțineri diferite despre lume și, pe de altă parte, îndeajuns de puțin fine pentru a putea spune când un vorbitor exprimă aceeași judecată. Voi aborda doar al doilea aspect; acesta e cel mai important în momentul de față. Propozițiile-individuale sunt mai fin specificabile decât judecățile. De pildă, dacă eu mă plâng și zic: „Sunt obosit“, eu exprim același lucru pe care cineva l-ar exprima dacă ar spune despre mine: „El e obosit“. Aceste două propoziții-individuale sunt, evident, diferite; au proprietăți diferite – bunăoară, faptul că implică vorbitori diferiți care folosesc propoziții-tip diferite. Dar, ele au aceeași valoare de adevăr. Cum se explică acest lucru? Intuitiv, răspunsul este că ele au aceeași valoare de adevăr *pentru că* ele exprimă aceeași propoziție, *pentru că* exprimă aceeași susținere despre ceea ce are loc. E natural, de aceea, să luăm judecățile și nu propozițiile-individuale ca purtători ai adevărului.

3. Propozițiile-individuale au anumite deficiențe pe care judecățile nu le au. Și anume: propozițiile-individuale pot avea (și de obicei au) *presupoziții*; judecățile nu au presupoziții. Judecățile sunt sau adevărate sau false. Căci, cum o judecată este o susținere despre lume, nu avem decât două posibilități: că acea susținere e corectă sau că nu e corectă. Dacă susținerea nu e corectă, judecata este falsă. Așadar: în cazul judecăților, a spune că ele sunt false înseamnă *un singur lucru* – că nu sunt adevărate. Lucrurile se schimbă însă cu propozițiile individuale. Dacă eu arăt spre masa din stânga mea (care e, întâmplător, goală) și zic: „Cartea de pe masă este scrisă de Camap“, atunci propoziția mea individuală sigur nu e adevărată; și e așa pentru că o presupoziție a ei – că pe masă e o carte – nu e îndeplinită. Dacă pe masă ar fi însă o carte, dar una scrisă de altcineva, atunci presupoziția propoziției-individuale pe care am pronunțat-o ar fi îndeplinită, dar propoziția individuală iarăși nu ar fi adevărată. Însă acum ea nu ar fi adevărată dintr-un alt motiv decât în primul caz – cum nu se întâmplă cu judecățile.

Unii autori consideră că atunci când presupozițiile unei propoziții-individuale nu sunt îndeplinite, atunci acestea nu numai că sunt neadevărate, dar

nu sunt nici false. Ele nu ar avea valoare de adevăr. Am putea zice: atunci când presuposițiile unei propoziții-individuale nu sunt îndeplinite, atunci aceasta nu reușește să exprime o judecată.

Să presupunem acum – așa cum face Quine – că judecățile ar fi exprimate numai de propoziții eterne. Motivul pentru care el procedează astfel e următorul: dacă presupunem că judecățile sunt înțelesuri ale propozițiilor tip, atunci ar trebui să admitem că în diferite contexte propoziția-tip „Ușa este închisă” își schimbă înțelesul și exprimă judecăți diferite în contexte diferite. Dar dacă am avea o propoziție eternă, atunci nu ar mai trebui să spunem că înțelesul acesteia variază cu contextul.

Dacă însă judecățile sunt înțelesuri ale propozițiilor eterne, mai e nevoie de ele ca entități separate? Cel puțin două sunt avantajele judecăților asupra propozițiilor eterne:

4. O propoziție eternă poate să nu fie pronunțată niciodată. Cu toate acestea, despre judecata pe care o exprimă putem încă zice că e adevărată sau falsă.

5. Există judecăți inexprimabile: anume judecăți care nu corespund nici unei propoziții (tip, individuale sau eterne). Astfel de judecăți vom întâlni mai jos, în această lucrare. De pe acum trebuie totuși notat ceva: inexprimabilitatea este nu absolută, ci relativă la un limbaj; ceea ce este neexprimabil într-un limbaj poate fi exprimat în altul. Dar, pentru orice limbaj îndeajuns de puternic, vor exista mereu judecăți inexprimabile. (În § 5 am numit elementare judecățile exprimabile; deci cele inexprimabile sunt *neelementare*; atenție însă! acolo era vorba de un anumit *mod* de a construi judecățile).

Diversi autori au ridicat varii obiecții împotriva admiterii judecăților. Cel mai viguros adversar al acestor entități este Quine: „Obiecția mea față de recunoașterea judecăților nu se naște din parcimonie filosofică – din dorința de a nu visa la mai multe lucruri, în cer și pe pământ, decât sunt necesare; nu ia naștere – mai concret – nici din particularism – din dezaprobarea entităților intangibile sau absolute. Obiecția mea este mai importantă. Căci dacă ar exista judecăți, ele ar induce o anumită relație de sinonimie sau echivalență între propozițiile însele: ar fi echivalente acele propoziții care exprimă aceleași judecăți. Obiecția mea este că relația de echivalență respectivă nu are nici un sens obiectiv la nivelul propozițiilor”¹. Să vedem mai pe larg în ce constau argumentele lui Quine.

¹ *Philosophy of Logic*, p. 3. A se vedea și *Word and Object*, paragrafele 40–43.

Mai întâi, el admite că acceptarea judecăților ca înțelesuri ale propozițiilor este doar o manifestare a unui punct de vedere mai răspândit asupra înțelesului. Potrivit aceluși punct de vedere, există o galerie de idei, iar fiecare idee este atașată expresiei al cărui înțeles este; în particular, fiecare judecată e atașată unei propoziții corespunzătoare. Quine propune să eliminăm aceste umbre ale propozițiilor care sunt judecățile. Căci tot ceea ce putem obține lucrând cu ajutorul judecăților ne este dat și dacă ne rezumăm numai la propoziții. Așadar, prima obiecție este următoarea: judecățile nu sunt mai folositoare ca vehicule ale adevărului decât propozițiile eterne.

Obiecția cea mai importantă este însă alta: în general, dacă admitem un gen de entități, trebuie să admitem și un *criteriu de identitate* pentru ele. Maxima lui Quine este: nici o entitate fără identitate. Prin urmare, dacă admitem judecăți, trebuie să spunem când sunt acestea identice și când nu. Să presupunem deci că avem două propoziții-tip. Să presupunem că ele sunt pronunțate – obținând astfel două propoziții-individuale. Care e atunci motivul pentru care noi am afirma: cele două propoziții-individuale exprimă *aceeași* judecată?

Aici Quine argumentează prin reducere la absurd. Să admitem, zice el, că ar exista criterii de identitate pentru judecăți. Atunci am putea proceda astfel: am zice că dacă două propoziții (individuale) exprimă aceeași judecată, ele sunt strâns legate între ele. În ce fel? Judecățile, să ne amintim, sunt înțelesuri ale propozițiilor. Așadar, dacă două propoziții (individuale) exprimă aceeași judecată, înseamnă că au același înțeles. Sau, încă: înseamnă că sunt sinonime. Prin urmare, am putea să definim între propozițiile (individuale) o relație de echivalență – relația de sinonimie.

Or, argumentează Quine, această relație nu poate fi construită¹. Așadar, premisa de la care am pornit e falsă: nu există criterii de identitate pentru judecăți. De aceea, aceste entități trebuie eliminate.

Să recapitulăm obiecțiile care, după Quine, pot fi ridicate împotriva judecăților:

a) Judecățile sunt entități a căror postulare nu e necesară. Tot ceea ce câștigăm prin apelul la ele poate fi reformulat apelând la alte entități – la propozițiile eterne, sugerează Quine. Anume, putem spune că judecățile sunt înțelesurile judecăților eterne. Însă dacă există o corespondență biunivocă între judecăți și aceste propoziții – iar de propozițiile eterne deja dispunem (căci ele sunt construite în limba noastră), atunci de ce să postulăm și aceste entități numite judecăți? Briciul lui Occam poate fi pus aici la lucru: dacă nu este necesar, nu trebuie să multiplicăm entitățile.

¹ Nu voi insista asupra acestui argument al lui Quine. A se vedea celebra sa lucrare *Două dogme ale empirismului*. Traducere în românește în *Epistemologie. Orientări contemporane*, Editura Politică, București, 1974.

b) Judecățile sunt entități a căror natură nu e limpede. Știm că ele sunt înțelesuri ale propozițiilor; însă nu e clar ce fel de lucruri sunt aceste înțelesuri. Altfel zis, vrem să explicăm judecățile zicând că ele sunt înțelesuri de propoziții. Însă e mai clar ce e un astfel de înțeles decât ce e o judecată?

c) Se spune că judecățile sunt obiecte abstracte. Or, filosofii din tradiție nominalistă și empiristă au avertizat în mod repetat că trebuie să fim cu băgare de seamă ori de câte ori se solicită admiterea unor entități abstracte. Principalul motiv, după Quine, e acela că, în ce le privește, e dificil să producem criterii satisfăcătoare de identitate. În particular: când putem spune că două judecăți sunt identice? Putem da criterii în acest sens? Cel puțin atâta vreme cât astfel de criterii nu sunt formulate, trebuie să ne abținem să admitem judecățile.

d) În sfârșit, chiar dacă s-ar formula criterii de identitate pentru judecăți, acestea nu vor fi satisfăcătoare, întrucât ar implica un concept nesatisfăcător de sinonimie (între propoziții).

Dacă cineva ar vrea să facă totuși apel la judecăți ca purtători ai adevărului, atunci va fi nevoie să ofere căi de a răspunde la aceste obiecții. După Quine, cea mai puternică e a patra. E normal de aceea ca ea să fie prima luată în discuție. Aici se poate argumenta în mai multe feluri: 1) critica lui Quine a sinonimiei propozițiilor nu rezistă: există propoziții sinonime; 2) nu există propoziții sinonime; în același timp, două propoziții diferite exprimă întotdeauna judecăți diferite. Prin urmare, chiar dacă spunem că două judecăți sunt identice, nu susținem prin aceasta că ele sunt exprimate de două propoziții diferite – și deci identitatea a două judecăți nu implică sinonimia a două propoziții; 3) admitem că două judecăți exprimate de două propoziții diferite sunt identice, că cele două propoziții nu sunt sinonime; dar că, totuși, faptul că ele nu sunt sinonime nu implică faptul că judecățile pe care le exprimă nu pot fi identice.

Cea mai atrăgătoare soluție cred că este a treia. Ea pare însă contradictorie, cel puțin atâta vreme cât definim sinonimia a două propoziții prin faptul că ele exprimă aceeași judecată. Să adoptăm însă un punct de vedere mai slab privind relația dintre cele două condiții: a exprima aceeași judecată e o condiție numai necesară, dar nu și suficientă pentru sinonimia a două propoziții¹. Adică, dintre relațiile:

(i) Dacă două propoziții nu sunt sinonime, atunci ele nu exprimă aceeași judecată.

¹ Acest punct de vedere e adoptat de R. Carnap, în *Semnificație și necesitate*, Editura Dacia, Cluj, 1972, §§ 14–16, care sugerează că pentru sinonimia a două propoziții e necesară o relație foarte tare, de „izomorfism structural”.

(ii) Dacă două propoziții sunt sinonime, atunci ele exprimă aceeași judecată, numai a doua este admisibilă, nu și prima. Atunci însă, chiar dacă două propoziții nu sunt sinonime, ele vor putea totuși exprima aceeași judecată.

În ce privește obiecția (c), răspunsul cel mai potrivit care i se poate da constă în a arăta precis ce sunt judecățile: ce fel de obiecte sunt. Dacă ele sunt construite ca entități de un fel admis deja, având constituenți despre care știm când se află în relație de identitate, atunci vom fi produs, prin aceasta, căutatele criterii de identitate. Să observăm, de asemenea, că astfel se răspunde și obiecției (b). Prima obiecție poate fi depășită dacă se dovedește că există judecăți care nu pot fi prinse lingvistic prin propoziții de vreun fel (în particular, prin propoziții eteme). În capitolul următor se vor construi, într-adevăr, astfel de judecăți (un exemplu e acesta: nici o propoziție a aritmeticii lui Peano nu poate exprima judecata că axiomele aritmeticii sunt adevărate *numai* în modelul standard sau intenționat al acesteia).

Voi menționa două încercări de a construi judecățile, astfel încât obiecțiile împotriva lor, precum cele menționate mai devreme, să se disipeze.

a) *Judecățile russelliene*. După Russell, judecățile sunt susțineri despre lume, și sunt adevărate exact în cazul în care lumea este așa cum se susține că este. Aceste judecăți sunt entități complexe. Ele au constituenți care corespund obiectului susținerii. Astfel, fie propoziția:

(8.6) Socrate este filosof.

Ea exprimă o judecată, care e susținerea că omul Socrate are proprietatea de a fi filosof. Judecata va consta din *omul Socrate* și din proprietatea *a fi filosof*. La fel, propoziția:

(8.7) Ion are asul de treflă,

exprimă o judecată, ai cărui constituenți sunt: Ion, asul de treflă și relația de a avea. Această susținere e adevărată atunci când printre faptele din lume se află și acela că Ion are acel as de treflă.

Este ușor de văzut că nu e nici o problemă în a arăta când două judecăți russelliene sunt identice: identitatea lor constă în faptul de a avea exact aceiași constituenți. (Dacă vrem să fim mai preciși, am putea spune, de pildă, că judecata exprimată de (8.7) este *tripletul ordonat* < Ion, asul de treflă, a avea >; apelând la teoria mulțimilor, două triplete sunt identice atunci când primul element din primul triplet este identic cu primul element din al doilea triplet, când al doilea element din primul triplet este identic cu al doilea element din al doilea triplet și când al treilea element din primul triplet este identic cu al treilea element din al doilea triplet).

Accastă concepție asupra judecăților ridică însă probleme. Mai întâi, deși desigur putem spune că două judecăți sunt identice dacă ele au aceiași constituenți, totuși e greu de construit o judecată falsă. Ca să fie falsă, ar trebui să avem niște fapte care o fac falsă. Or, acestea tocmai că nu există. De exemplu, judecata falsă exprimată de propoziția:

(8.8) Desdemona îl iubea pe Cassio

ar urma să aibă drept component pe Desdemona, pe Cassio, precum și relația de iubire a Desdemonei față de Cassio. Or, aceasta din urmă sigur nu există.

Apoi, ce este o proprietate precum „a fi filosof” ori o relație precum „a iubi”? Acestea sunt entități pentru care trebuie să oferim de asemenea criterii de identitate (iar obiecțiile lui Quine ar putea fi reiterate aici).

În al treilea rând, judecățile russelliene nu sunt suficient de fine pentru a da seamă de distincții pe care intuitiv le acceptăm. Astfel, să presupunem că eu pronunț propoziția: „Ion are asul de treflă”, referindu-mă la un joc, anume de poker. Dacă Ion nu participă la acel joc, intuitiv noi considerăm că judecata e falsă. Dar, să presupunem în plus că, exact în acel moment, Ion se afla într-un alt loc și juca poker; întâmplător, el avea în acel joc asul de treflă. Judecata russelliană, așa cum am văzut, are drept constituenți pe Ion, asul de treflă și relația de a avea. Ea este adevărată dacă faptele în lume sunt exact așa cum sunt aranjate în judecata noastră; or, în aceasta, ele sunt aranjate astfel încât relația a avea are loc între Ion și asul de treflă. În lume, pe de altă parte, există faptul că Ion are asul de treflă. Așadar, potrivit abordării russelliene, judecata exprimată de propoziția „Ion are asul de treflă” va fi adevărată; însă am văzut că intuitiv situația nu stătea deloc astfel.

În sfârșit, așa cum au arătat cercetări amănunțite, judecățile russelliene nu permit o tratare satisfăcătoare a situațiilor referențiale, a celor care, bunăoară, sunt implicate în constituirea paradoxului mincinosului¹.

b) *Judecățile în sens model-teoretic.* Așa cum am văzut, modelele sunt entități pentru care avem criterii clare de identitate. În cazul lui $L(S)$ – singurul pe care l-am avut în vedere până acum – spunem că două modele M_1 și M_2 sunt identice exact în cazul în care: a) M_1 este mulțimea S_1 de litere propoziționale; b) M_2 este mulțimea S_2 de litere propoziționale; și c) S_1 este aceeași mulțime cu S_2 . Am definit, de asemenea, pentru o propoziție φ , relația $M \models \varphi$, și am arătat cum poate fi construită aceasta pentru orice φ . Intuitiv, propusesem ca relația care are loc între M și φ să fie citită astfel: φ e adevărată în M .

¹ În acest sens, J. Barwise, J. Etchemendy, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, Oxford, 1987.

Acum pare puțin neîntemeiată această opțiune; vom vedea însă imediat că ea poate fi totuși păstrată, chiar dacă admitem că purtătorii adevărului nu sunt propozițiile, ci judecățile. Pentru moment, să pomim de la relația $\models$ și să acceptăm chiar, de dragul simplității, că citim expresia $M \models \varphi$ ca: φ e adevărată în M .

Vom defini acum judecățile în sens model-teoretic:

(8.9) O judecată este o mulțime de modele.

De pildă, judecata că ceva are loc sau nu are loc (principiul logic al terțului exclus) e mulțimea tuturor modelelor; judecata că ceva și are loc și nu are loc (principiul contradicției) e mulțimea care nu cuprinde nici un model, deci mulțimea vidă. Aici trebuie subliniat că de fiecare dată noi presupunem, într-un sens, un limbaj: căci modelele pe care le luăm în considerare sunt *modelele unui limbaj anumit*.

Această observație va fi mai limpede odată ce vrem să explicităm mai mult sensul lui (8.9); căci până acum, desigur, (8.9) nu e încă justificată, după cum viza ideii că o lege logică e mulțimea tuturor modelelor nu este totuși intuitivă. În acest scop, să procedăm în felul următor: am văzut că, într-o încercare de a spune *ce* sunt judecățile, s-a formulat ipoteza că o judecată este înțelesul unei propoziții. Să încercăm deci să vedem care ar fi – în sens model-teoretic – judecata exprimată de o propoziție. Vom defini:

(8.10) Judecata exprimată de propoziția φ este mulțimea acelor M astfel încât $M \models \varphi$.

Adică, judecata exprimată de o propoziție este mulțimea modelelor în care ea este adevărată. Să ne raportăm la $L(S)$. Fie o propoziție φ a lui $L(S)$; atunci φ exprimă o judecată, și această judecată este mulțimea tuturor modelelor lui $L(S)$ în care φ e adevărată. E limpede acum ce se întâmplă cu legile logice și cu contradicțiile:

a) o lege logică φ este adevărată în toate modelele și deci judecata exprimată de φ este mulțimea tuturor modelelor;

b) o contradicție ψ nu este adevărată în nici un model și deci judecata exprimată de ψ este mulțimea vidă.

Este ușor de observat că această abordare a conceptului de judecată satisface exigențele ce țin de problema criteriilor de identitate. Într-adevăr, două judecăți sunt identice dacă au aceleași elemente. Judecățile sunt mulțimi de modele – și, întrucât avem criterii de identitate pentru modele, avem de asemenea criterii de identitate și pentru mulțimile de modele. Potrivit principiului extensionalității din teoria mulțimilor, două mulțimi sunt identice exact în cazul în care au aceleași elemente.

Potrivit acestei înțelegeri a judecăților, diversele operații cu judecăți și relații între judecăți primesc o interpretare foarte elegantă. Astfel:

a) negația unei judecăți este judecata constând din complementarea mulțimii respective;

b) conjuncția a două judecăți este judecata constând din intersecția mulțimilor respective;

c) disjuncția a două judecăți este judecata constând din reuniunea mulțimilor respective;

d) o judecată implică logic o altă judecată dacă prima este inclusă în a doua etc.

O caracteristică foarte importantă a înțelegerii model-teoretic a judecăților este următoarea: potrivit lui (8.10), orice propoziție exprimă o judecată (acesta e cel puțin cazul lui $L(S)$!). Dar, ținând seama de (8.9), nu e clar dacă relația are sens și în direcție inversă: dacă orice mulțime de modele este astfel încât există o propoziție care o exprimă. În fapt, așa ceva *nu* se întâmplă. Să privim mai în amănunt această chestiune. Cum am văzut în § 5, o mulțime X de modele se numește *elementară* dacă există o propoziție ϕ astfel încât X e mulțimea modelelor lui ϕ ; altfel zis, o mulțime X de modele este elementară dacă există o propoziție ϕ care exprimă judecata X .

Însă nu toate mulțimile de modele sunt elementare. Că e așa se poate arăta foarte simplu (cf. și exercițiul (26) din § 6). Să luăm cazul limbajului $L(S)$, când S este o mulțime infinită *numărabilă*. Modelele lui $L(S)$ sunt submulțimi ale lui S și, potrivit unei celebre teoreme a lui Cantor, există o mulțime *infinită nenumărabilă* de mulțimi de modele; de aici decurge imediat că nu putem realiza o corespondență biunivocă între mulțimea propozițiilor lui $L(S)$ (potrivit regulilor de construire a acestora din S , dacă S e infinită numărabilă, atunci mulțimea propozițiilor lui S va fi tot infinită numărabilă) și mulțimea mulțimilor de modele ale lui $L(S)$: vor exista mulțimi de modele ale lui $L(S)$ cărora nu le putem pune în corespondență nici o propoziție a lui $L(S)$.

Se ridică atunci întrebarea: nu cumva am definit *prea larg* noțiunea de judecată? Dacă o mulțime de modele nu corespunde nici unei propoziții, de ce ar fi încă numită „judecată”? Există cel puțin două motive în acest sens. În primul rând, e posibil ca o mulțime de modele să nu fie mulțimea modelelor unei propoziții, ci a unei *mulțimi* de propoziții. Că există astfel de mulțimi se poate demonstra chiar și privitor la $L(S)$ (a se vedea exercițiile 27–28 din § 6). Aceste mulțimi de modele au fost numite în § 5 *elementare în sens larg*. Ele redau ceea ce exprimă nu o propoziție anume a unui limbaj, ci o mulțime de propoziții din acel limbaj (sigur, dacă acea mulțime e finită, atunci putem construi conjuncția acelor propoziții, care e tot o propoziție; dar dacă

mulțimea e infinită, nu mai putem proceda astfel). E natural ca aceste mulțimi de modele care nu sunt elementare, dar sunt elementare în sens larg, să fie numite tot judecăți.

Să luăm un exemplu. Fie următoarea expresie:

$$\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$$

Ea este formulată în metalimbajul lui $L(S)$; semnele „ ϕ ” și „ ψ ” sunt metavariabile – sunt nume pentru propozițiile din $L(S)$. De aceea, expresia noastră *nu* este o anumită propoziție a lui $L(S)$, ci o *schemă* de propoziții din $L(S)$.

Propozițiile:

$$p \rightarrow (p \wedge q)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow ((p \wedge q) \wedge q)$$

$$(p \vee q) \rightarrow ((p \vee q) \wedge r)$$

etc. sunt fiecare propoziții pe care metapropoziția noastră le numea. Câte astfel de propoziții sunt numite de ea? O infinitate (nenumărabilă). Să ne gândim acum la mulțimea tuturor acestor propoziții, fie Γ aceasta. Propozițiile din Γ definesc o mulțime de modele elementare în sens larg.

Susținerea mea e că această mulțime de modele *este* o judecată. Într-adevăr, e judecata după care *conjuncția se poate extinde*. Sigur, această judecată e falsă (căci conjuncția – spre deosebire de disjuncție – nu se poate extinde); însă acest lucru nu are importanță. Important e altceva: că această judecată exprimă înțelesul lui $\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$ – adică, al tuturor propozițiilor din Γ .

Există însă și mulțimi de modele care *nu* sunt nici elementare în sens și care totuși ar avea sens să fie numite judecăți. În $L(S)$ se poate arăta (cf. exercițiul 27 din § 6) că mulțimile de modele cu un singur element sunt elementare în sens larg. Totuși, așa ceva nu se întâmplă în orice condiții. Bunăoară, se poate arăta că nu există nici o mulțime de propoziții ale aritmeticii lui Peano care să fie adevărate numai în modelul standard; altfel zis, mulțimea ce cuprinde doar modelul standard al aritmeticii lui Peano nu este nici elementară, nici elementară în sens larg. Cu toate acestea, în mod intuitiv am vrea să spunem că aritmetica lui Peano exprimă ceea ce se petrece cu *numerele naturale*; adică, am vrea să admitem judecata că *aritmetica lui Peano este despre numerele naturale*. Dar, ea nu e exprimată de nici o propoziție, și nici de o mulțime de propoziții ale aritmeticii lui Peano. Așadar, abordarea model-teoretică permite să construim judecăți care, într-un sens, sunt „inefabile”.

Să notăm, de asemenea, că admiterea unei identități între judecăți nu face ca abordarea model-teoretică să cadă sub critica lui Quine: căci nu se poate conchide de aici că am fi constrânși să admitem o relație de sinonimie între propoziții. Într-adevăr, tot ce putem spune este că:

(8.11) Dacă două judecăți nu sunt identice (și ele sunt exprimate de două propoziții), atunci propozițiile care le exprimă nu sunt sinonime.

Însă relația

(8.12) Dacă două judecăți sunt identice (și ele sunt exprimate de două propoziții), atunci propozițiile care le exprimă sunt sinonime.

nu e valabilă. Bunăoară, propozițiile $\phi \vee \neg \phi$ și $\phi \rightarrow \phi$ sunt adevărate ambele în toate modelele (și deci exprimă aceeași judecată), însă nu pare corect să zicem că ele sunt sinonime.

Totuși, s-ar părea că, deși face falsă relația (8.12), înțelegerea model-teoretică a judecăților este *prea slabă*; căci nu pare corect să admitem un punct de vedere care face ca toate legile logice să reprezinte exact aceeași judecată. E o deosebire între principiul terțului exclus și cel al identității! Această observație este foarte pertinentă; probabil că aici se află cel mai mare dezavantaj al înțelegerii model-teoretice a judecăților. (Situția nu e fără ieșire; s-au produs, de către unii logicieni, modalități de a o depăși. Din păcate însă, nu avem încă la dispoziție unelte pentru a arăta în ce constau aceste soluții).

În continuare, prin judecăți vom înțelege – în spiritul abordării modeliste – mulțimi de modele. Vom considera că judecățile sunt purtătorii adevărului. Cu toate acestea, frecvent vom spune că propozițiile din limbajele considerate sunt adevărate sau false. Această procedură este justificată în sensul următor: orice propoziție ϕ poate fi pusă în corespondență cu o judecată bine determinată; atunci, ori de câte ori vom spune că o propoziție ϕ e adevărată într-un model M , aceasta va avea sensul că modelul M este un element al judecății pe care o exprimă propoziția ϕ .

C a p i t o l u l I I I

METATEORIA LOGICII DE ORDINUL ÎNTÂI A PREDICATELOR

§ 9. Limbaje și modele

Trecând de la logica propozițiilor la cea a predicatelor să începem prin a pune din nou întrebarea centrală pentru orice investigație logică: Ce înseamnă că propozițiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \dots$ implică logic propoziția ψ ?

Un răspuns satisfăcător ar trebui să cuprindă – așa cum am văzut pe exemplul elementar al logicii propozițiilor – trei elemente:

a) O reconstrucție sintactică a relației de implicație logică. Sintactic, implicația logică e reconstruită ca *relație de deductibilitate*: ψ este demonstrabilă din $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, în simboluri $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \vdash \psi$.

b) O reconstrucție semantică a relației de implicație logică. În plan semantic relația oferită este cea de *consecință logică*: ψ este o consecință logică a propozițiilor $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, în simboluri $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \models \psi$.

c) O aserțiune (sau un grup de aserțiuni) privind raporturile dintre cele două reconstrucții. În general, e vorba de formularea unui rezultat de *completitudine* (sau *necompletitudine*).

Cele trei elemente jalonează direcțiile pe care vom merge în cercetarea proprietăților logicii predicatelor. Primul pas va trebui să constea în construirea precisă a celor două noțiuni cheie: cea sintactică de deductibilitate și cea semantică de consecință logică. În mare, cele două noțiuni sunt generalizări ale noțiunilor corespunzătoare construite la nivelul logicii propozițiilor. Bunăoară, pentru a elabora în logica predicatelor noțiunea de deductibilitate, va trebui să plecăm de la definiția acesteia în logica propozițiilor și să o lărgim, prin considerarea elementelor specifice (a regulilor specifice, de exemplu) ale logicii predicatelor. Semantic însă, problemele sunt puțin mai complicate.

Într-adevăr, să ne aducem aminte că în definirea relației $\varphi_1, \dots \varphi_n \models \psi$ în logica propozițiilor, această relație are loc dacă orice model în care

sunt adevărate toate propozițiile $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, este un model în care este adevărată și propoziția ψ . Dar ce este un model al acestor propoziții? Desigur că nu mai putem să tratăm drept modele aceleași entități care erau modele în cazul logicii propozițiilor. În orizontul logicii predicatelor, modele vor fi alt fel de entități.

Ce fel de entități? Pentru a răspunde acestei întrebări, să observăm mai întâi că, atunci când construim modelele în orizontul logicii propozițiilor, trebuia să ne raportăm la un anumit limbaj $L(S)$. Menționăm atunci că mulțimea modelelor unui astfel de limbaj $L(S)$ depinde, în anumite privințe, de mulțimea S a literelor propoziționale (de pildă, când S era finită, mulțimea modelelor pentru $L(S)$ era infinită; când S era infinit numărabilă, mulțimea modelelor pentru $L(S)$ era infinit nenumărabilă; când S era finită, modelele pentru $L(S)$ erau toate finite etc.).

Morala care decurge de aici e aceea că noțiunea de model trebuie să fie considerată ca relativă: relativă la limbajul ale cărui modele le cercetăm.

În acest capitol, limbajele considerate vor fi mult mai bogate decât limbajul $L(S)$; la rândul lor, modelele pentru acestea vor fi mult mai complexe decât modelele pentru $L(S)$. Aceste limbaje au însă o serie de caracteristici comune, motiv pentru care despre toate vom spune că sunt limbaje de ordinul întâi ale predicatelor (cu unelte mai precise, vom reveni asupra naturii acestor limbaje și asupra logicii construite în cadrul lor în paragraful 16 mai jos).

Informal vorbind, un limbaj de ordinul întâi al predicatelor – sau pe scurt, un limbaj de ordinul întâi – este un instrument cu ajutorul căruia pot fi făcute enunțuri despre *obiecte*. Aceste obiecte nu trebuie, desigur, să fie considerate numai ca obiecte spațio-temporale: oameni, animale, galaxii, particule elementare etc. Ca obiecte putem trata numerele naturale, numerele reale ori mulțimile. Într-un limbaj de ordinul întâi se pot formula propoziții despre aceste obiecte. Propozițiile pot fi de două feluri. Mai întâi, se formulează propoziții despre faptul că un obiect are o anumită proprietate sau că două (sau mai multe obiecte) stau într-o anumită relație; de asemenea, se pot formula propoziții despre felul în care, prin intermediul unor funcții, plecând de la un anumit obiect (sau mai multe obiecte) – argument(e) al(e) acelei funcții – se obține un nou obiect – valoarea acelei funcții pentru acel (sau acele) argument (argumente).

În formularea propozițiilor de primul fel – precum „Oamenii sunt mamifere“, „Electronul are sarcină electrică negativă“, „Numărul 3 este mai mic decât numărul 7“, „Numărul 4 este succesorul numărului 3“, „Mulțimea numerelor este nevidă“ etc. – sunt folosite simboluri pentru *proprietăți* (ca „mamifer“, „sarcină electrică negativă“) și pentru *relații* între obiecte („mai mic“). Vom spune că aceste simboluri pentru proprietăți și relații sunt *predicate*. Predicatele sunt unare,

binare, ternare etc., în general n -are. Un predicat este n -ar dacă atunci când, aplicat unui șir de n nume de obiecte, ia naștere o propoziție. De exemplu, predicatul „om“ este unar, căci aplicându-l numelui „Socrate“ ia naștere propoziția „Socrate este om“. Predicatul „mai mic“ este binar, căci aplicându-l șirului de două numere 3, 7 obținem propoziția „3 este mai mic decât 7“.

În formularea propozițiilor de al doilea fel – precum „ $5 + 7 = 12$ “ sau „Succesorul lui 3 este 4“ – sunt folosite simboluri *funcționale*. Ca și predicatele, funcțiile sunt unare (funcția succesor, de pildă) binare (funcția adunare, de pildă), în general n -are. Trebuie să fim atenți aici la următorul lucru: în limbajul de ordinul întâi funcțiilor le corespund simboluri funcționale. Astfel, „+“ este un simbol care aparține limbajului aritmeticii și care denotă o funcție binară – operația de adunare între numere.

În general, deci, un limbaj de ordinul întâi va cuprinde:

- a) simboluri care denotă obiecte;
- b) simboluri care denotă proprietăți și relații;
- c) simboluri care denotă funcții.

Într-un limbaj de ordinul întâi nu există însă simboluri care să denote proprietăți de proprietăți sau proprietăți de funcții. De pildă, într-un limbaj de ordinul întâi nu vom putea formula propoziția „A fi rațional este o proprietate esențială a omului“, fiindcă „esențial“ este o expresie care denotă o proprietate a unei proprietăți (rațional) a unui obiect (a lui Socrate, să zicem); or, astfel de expresii nu apar într-un limbaj de ordinul întâi. De asemenea, nu putem formula într-un atare limbaj nici propoziția „Adunarea numerelor naturale este comutativă“, deoarece „comutativ“ este o expresie care denotă o proprietate a unei funcții (adunarea). Desigur, faptul că adunarea este comutativă poate fi exprimat prin propoziția:

Pentru orice numere x și y , $x + y = y + x$.

care, așa cum vom vedea, este o propoziție a limbajului de ordinul întâi al aritmeticii. Însă aici nu apare expresia „comutativ“, nu se folosesc, deci, simboluri care denotă proprietăți de funcții.

O problemă foarte importantă pentru logica de ordinul întâi a predicatelor este următoarea: ce predicate pot fi denotate cu mijloacele limbajelor de ordinul întâi? Exemplul comutativității sugerează că putem folosi limbaje de ordinul întâi pentru a comunica informații care, la prima vedere, făceau necesare mijloace mai puternice, bunăoară simboluri pentru predicate de funcții. Teoremele asupra logicii de ordinul întâi a predicatelor pe care le vom cerceta în cele ce urmează vor dovedi că situația este și mai complicată: aparent, în logica de ordinul

întâi putem folosi simboluri care să denote proprietăți ale mulțimilor (care sunt tratate ca obiecte) precum „finit“, „infinit“, „infinit numărabil“, „infinit nenumărabil“ etc. Aparent, pentru a comunica informația că mulțimea X este finită putem să folosim mijloacele simbolice ale unui limbaj de ordinul întâi. Într-adevăr, aici „ X “ este un simbol care denotă un obiect (o mulțime), iar „finit“ este un simbol care denotă o proprietate de obiecte. Dar, așa cum se va dovedi în paragrafele de mai jos, „finit“ nu este un predicat care să poată fi manevrat în logica de ordinul întâi, deși realmente denotă o proprietate a obiectelor considerate (= a mulțimilor).

Să formulăm acum în chip precis definiția limbajelor de ordinul întâi. Un astfel de limbaj L este o colecție de simboluri. Simbolurile vor fi împărțite în trei grupuri:

- a) simboluri constante individuale;
- b) simboluri predicative;
- c) simboluri funcționale.

Vom folosi litere latine mici $c_0, c_1, \dots, c_n$ ca simboluri constante individuale, majuscule latine $P_0, P_1, \dots, P_n$ ca simboluri predicative și majuscule latine $F_0, F_1, \dots, F_n$ ca simboluri funcționale. Când, de exemplu, limbajul L este finit, îl putem scrie astfel:

$$L = \{P_0, \dots, P_n; F_0, \dots, F_m; c_0, \dots, c_q\}$$

Uneori, simbolurile care apar în limbaj sunt standard. Astfel, limbajul teoriei mulțimilor (în varianta Zermelo–Fraenkel) cuprinde numai un simbol predicativ (pentru predicatul binar al apartenenței), dar nici un simbol constantă individuală și nici un simbol funcțional. Deci

$$L = \{\in\}$$

Limbajul aritmeticii cuprinde o constantă individuală – care denotă numărul zero – și trei simboluri funcționale, care denotă funcția succesor, operațiile de adunare și înmulțirea. Așadar, acest limbaj poate fi scris sub forma:

$$L = \{S, +, \cdot, 0\}$$

Adesea este nevoie să trecem de la un limbaj L la un altul L' , care are toate simbolurile lui L , plus altele. În aceste cazuri scriem $L \subseteq L'$ și spunem că L' este o *extindere* a lui L , sau că L este o *restrângere* a lui L' . Cum L și L' sunt mulțimi de simboluri, vom scrie și $L' = L \cup X$, unde X este mulțimea noilor simboluri.

Să trecem acum din planul sintactic în cel semantic și să definim *modelele pentru limbajul L* . Un model M este un model *pentru L* dacă putem interpreta în M toate simbolurile din L ; altminteri, nu avem nici o îndrituire să spunem că M este un model pentru L . Ideea este simplă:

a) dacă c este o constantă individuală a lui L , atunci acestui simbol trebuie să-i corespundă în modelul M un obiect din M ;

b) dacă P este un simbol predicativ n -ar, atunci lui P trebuie să-i corespundă în M o relație n -ară între obiectele din M ;

c) dacă F este un simbol funcțional m -ar, atunci lui F trebuie să-i corespundă în M o funcție m -ară de la obiectele din M la obiectele din M .

Aceste operații prin care simbolurilor din L facem să le corespundă obiecte, relații sau funcții din M le vom numi *interpretări* și le vom nota cu I, I_1, I_2 etc.

Un model M va cuprinde așadar o mulțime nevidă de obiecte, numită *domeniul* lui M . În acest domeniu.

a) fiecărei constante individuale c a lui L îi corespunde un obiect constant x din A , în simboluri $I(c) = x \in A$ (să subliniem aici că, potrivit notației folosite, „ x ” nu este o variabilă individuală, așa cum se obișnuiește să se scrie adesea în logică; simbolul „ x ” este folosit ca nume pentru un obiect constant, anume din A);

b) fiecărui predicat n -ar P al lui L îi corespunde o relație n -ară R între obiectele din domeniu A , în simboluri $I(P) = R \subseteq A^n$;

c) fiecărei funcții m -are F a lui L îi corespunde o funcție m -ară G , definită pe mulțimea A^m , care atașează fiecărui m -tuplu de obiecte din A un obiect din A , în simboluri: $I(F) = G: A^m \rightarrow A$.

Așadar, dacă $L = \{P_0, \dots, P_n; F_0, \dots, F_m; c_0, \dots, c_q\}$, atunci un model pentru L este o structură $M = \langle A, R_0, \dots, R_n; G_0, \dots, G_m; x_0, \dots, x_q \rangle$. Vom observa, de asemenea, că în aceeași structură M putem interpreta în moduri diferite simbolurile lui L . De pildă, putem face astfel încât $I(P_1) = R_1$ și $I(P_2) = R_2$, dar și $I'(P_1) = R_2$ și $I'(P_2) = R_1$. De aceea, nu este suficient să spunem: M este un model pentru L ; trebuie spus: M este un model pentru L sub interpretarea I . Pentru a fi riguroși, ori de câte ori avem în vedere un model al unui limbaj L e deci nevoie să menționăm explicit interpretarea I pe care o admitem. De multe ori însă, atunci când pentru o structură M nu considerăm decât o singură interpretare, ori când interpretarea este presupusă, nu vom mai menționa explicit interpretarea admisă.

Să luăm un exemplu. Fie $L = \{\text{poet, romancier}\}$ un limbaj care nu cuprinde decât două predicate unare. Un model M pentru L va fi deci o structură de tipul $\langle A, R_1, R_2 \rangle$. Să zicem că A este mulțimea cetățenilor români la 1 ianuarie 1994, iar R_1 și R_2 sunt două submulțimi ale lui A ; să presupunem în plus că R_1 este mulțimea poezilor, iar R_2 este mulțimea romancierilor (în ambele cazuri, aceste persoane sunt cetățeni români). Potrivit unei interpretări I a limbajului nostru, predicatului „poet” îi corespunde mulțimea R_1 (a poezilor), iar

predicatul „romancier“ îi corespunde mulțimea R_2 (a romancierilor). E limpede că modelul M al lui L este un *model intenționat* al limbajului L , fiindcă el descrie o situație care efectiv are loc. Să considerăm însă o altă interpretare, I' , care atașează predicatului „poet“ mulțimea R_2 (a cetățenilor care, de fapt, sunt romancieri), iar predicatului „romancier“ mulțimea R_1 (a cetățenilor care, de fapt, sunt poeți). Acest model M al lui L , sub interpretarea I' , desigur că nu descrie o situație care efectiv are loc; dar el descrie o *situație posibilă*, o situație în care cei care de fapt sunt poeți ar fi romancieri, iar cei care de fapt sunt romancieri ar fi poeți.

Pentru a evidenția, atunci când este cazul, care este interpretarea cu care se lucrează, vom face apel la o pereche de forma (M, I) pentru a vorbi despre modelul M . Dar dacă interpretarea I poate fi identificată fără nici o dificultate, pentru a vorbi despre modele ne vom referi pur și simplu la structuri de tipul M .

Fie acum două modele (M, I) și (M', I') ale limbajului L . Vom spune că relația R din modelul (M, I) *corespunde* relației R' din modelul (M', I') dacă există un predicat P al lui L și $I(P) = R$, $I'(P) = R'$. Convenții similare pot fi introduse și pentru celelalte simboluri ale lui L .

Să presupunem că L' este o extindere a lui L ; așadar, există o mulțime X de simboluri care nu aparțin lui L , și $L' = L \cup X$. Fie (M, I) un model al lui L . Putem extinde interpretarea I astfel încât în A să fie interpretate toate simbolurile din X . Vom numi interpretarea obținută, I' , extinderea lui I la limbajul L' . Acum, (M, I') este un model al lui L' ; vom spune că (M, I') este extinderea lui (M, I) la limbajul L' sau că (M, I) este restrângerea lui (M, I') la L .

Se numește *cardinalul* sau *puterea* modelului M cardinalul mulțimii A , deci $|A|$. Dacă A este finită, spunem că M este un model finit; dacă A este infinit numărabilă, spunem că M este infinit numărabil; dacă A este infinit nenumărabilă, spunem că M este infinit nenumărabil.

Cele mai importante noțiuni care pot fi introduse în acest moment sunt cele de *izomorfism* între două modele și de *submodel*.

(9.1) Două modele M și M' ale lui L sunt izomorfe, în simboluri $M \equiv M'$, ddacă există o funcție bijectivă $f: A \rightarrow A'$ astfel încât

a) Dacă R este o relație n -ară din M , iar R' este relația corespunzătoare acesteia din M' , atunci oricare ar fi obiectele $x_1, \dots, x_n$ din A ,

$$R(x_1, \dots, x_n) \text{ ddacă } R'(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

b) Dacă G este o funcție m -ară din M , iar G' funcția corespunzătoare ei din M' , atunci oricare ar fi obiectele $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ din A , dacă $G(x_1, \dots, x_m) = x_{m+1}$ atunci

$$G'(f(x_1), \dots, f(x_m)) = f(x_{m+1})$$

c) Oricare ar fi obiectul constant x din M și obiectul corespunzător lui x' din M' ,
 $f(x) = x'$.

Condițiile cuprinse în definiția (9.1) sunt intuitive. În primul rând, funcția f face ca fiecare obiect din domeniul A al lui M să aibă ca imagine un obiect din domeniul A' al lui M' . Acum, condiția (c), de exemplu, spune următoarele: să presupunem că există o constantă individuală c în limbajul L . Prin interpretare, în modelul M ei îi corespunde un obiect din A , obiectul x să zicem. Acestui obiect din A prin funcția f i se atașează un obiect x' din domeniul A' al modelului M' . Condiția (c) ne asigură că acest obiect x' din A' este obiectul prin care este interpretată în M' constanta c a limbajului L . Sau, condiția (a) spune următoarele: fie un predicat P n -ar al limbajului L . În M , lui îi corespunde o relație n -ară R între obiectele domeniului A . În M' lui îi corespunde o relație n -ară R' între obiectele domeniului A' . Acum fie obiectele $x_1, \dots, x_n$ din A care se află între ele în relația R . Condiția (a) ne asigură că relația R' are loc între obiectele din A' care corespund prin funcția f acestor obiecte.

(9.2) Un model M' se numește submodel al lui M , în simboluri $M' \subseteq M$, dacă $A' \subseteq A$ și

a) Orice relație R' n -ară din M' este restricția la A' a relației R corespunzătoare din A , în simboluri $R' = (A')^n \cap R$.

b) Orice funcție m -ară G' din M' este restricția la A' a funcției G corespunzătoare din M , în simboluri $G' = G/(A')^m$.

c) Fiecare obiect constant din M' este obiectul constant corespunzător din M .

Invers, dacă $M' \subseteq M$, spunem că M este o extindere a lui M' .

Se arată ușor că:

(9.3) Dacă $M \equiv M'$, atunci $|A| = |A'|$.

(9.4) Dacă $M \subseteq M'$ și $M' \subseteq M''$, atunci $M \subseteq M''$.

(9.5) Dacă $M \subseteq M'$, atunci $|A| \leq |A'|$.

(9.6) Relația $\equiv$ este o relație de echivalență (adică, este reflexivă, simetrică și tranzitivă).

§ 10. Formalizarea limbajelor de ordinul întâi

Data fiind noțiunea de model introdusă în paragraful anterior, până în prezent nu putem decât să spunem care e interpretarea unui simbol al limbajului L ; nu e însă posibil încă să decidem dacă anumite propoziții sunt adevărate sau nu într-un model. Altfel zis, dacă ϕ este o propoziție și M este un model, nu putem încă să răspundem la întrebarea: Când este adevărată propoziția ϕ în M ?

Un răspuns satisfăcător necesită două elemente:

- a) să se precizeze ce este o *propoziție* φ ;
- b) să se precizeze ce înseamnă că o propoziție φ *este adevărată* într-un model M , în simboluri $M \models \varphi$; așadar, să se construiască relația semantică $\models$.

Răspunsul la punctul (a) va consta în a *formaliza limbajele de ordinul întâi*; la punctul (b), esențială se va dovedi noțiunea de *satisfacere*. În acest paragraf vom aborda primul punct.

Pentru a formaliza un limbaj de ordinul întâi, fie L acesta, trebuie parcurși doi pași:

- 1) să se construiască noțiunea de *formulă* a lui L ;
- 2) să se construiască limbajul L ca *sistem formal*.

Pentru aceasta este necesară utilizarea următoarelor *simboluri logice*:

- (i) conective logice: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- (ii) variabile individuale: $v, v_0, v_1, \dots, v_n$;
- (iii) identitatea: $=$;
- (iv) cuantificatorul: $\forall$; $\exists$;
- (v) paranteze: $(,)$.

Să precizăm, mai întâi, că $\forall$ se citește: *pentru toți*; apoi, identitatea este un simbol pentru o relație binară între obiecte. În sfârșit, din motive de economie nu vom mai folosi în cele ce urmează decât conectivele logice $\neg$ și $\wedge$. Căci, cum se știe, toate celelalte pot fi definite cu ajutorul acestora două. Acest lucru va fi adesea presupus.

În logica predicatelor, definiția formulei este mai dificilă decât în cazul logicii propoziționale. Principala complicație provine din faptul că în logica predicatelor unele șiruri de simboluri sunt formule, iar altele sunt termeni (în timp ce, desigur, alte șiruri de simboluri nu sunt nici formule, nici termeni). Prin *termeni* vom înțelege, informal, expresii care nu stau pentru stări de lucruri, ci pentru obiecte. Definiția termenilor lui L va fi formulată în mod inductiv.

(10.1) Definiția termenilor lui L :

- a) o variabilă este un termen;
- b) un simbol constant din L este un termen;
- c) dacă F este un simbol funcțional m -ar din L și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni, atunci $F(t_1, \dots, t_m)$ este un termen;
- d) un șir de simboluri logice sau ale lui L este un termen dacă și numai dacă se poate obține prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a)–(c).

Bunăoară, în cazul aritmeticii, termenii vor fi, de exemplu, $0, S0, v_0, 0 + 0, 0 + v_0, S0 + v_0$ etc. Intuitiv, termenii sunt expresiile care denotă numerele naturale.

(10.2.1) Formulele atomare ale lui L sunt șirurile de simboluri logice sau din L de forma:

- a) $t_1 = t_2$, unde t_1 și t_2 sunt termeni ai lui L ;
- b) $P(t_1, \dots, t_n)$, unde P este un simbol predicativ n -ar al lui L , iar $t_1, \dots, t_n$ sunt termeni ai lui L .

(10.2.2) Definiția formulelor lui L :

- a) orice formulă atomică a lui L este formulă;
- b) dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \wedge \psi)$ și $(\neg \varphi)$ sunt formule;
- c) dacă φ este o formulă iar v este o variabilă, atunci $(\forall v)\varphi$ este o formulă;
- d) un șir de simboluri logice sau ale lui L este o formulă dacă și numai dacă se poate arăta că este formulă prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a)–(c).

În mai multe cazuri va fi nevoie să folosim noțiunea de *subformulă* a unei formule φ a lui L . Intuitiv, „subformulă a lui φ ” desemnează orice parte a lui φ care este ea însăși formulă. În chip precis, noțiunea e dată inductiv prin definiția următoare:

(10.3) ψ este o subformulă a lui φ dacă:

- a) φ este o formulă atomică și ψ este φ ; sau
- b) φ este o formulă $(\neg \varphi_1)$ și ψ este φ sau o subformulă a lui φ_1 ; sau
- c) φ este o formulă $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ și ψ este φ sau este o subformulă a lui φ_1 sau a lui φ_2 ; sau, în sfârșit,
- d) φ este o formulă $(\forall v)\varphi_1$ și ψ este φ sau este o subformulă a lui φ_1 .

În continuare, este preferabil să facem unele abrevieri:

$(\exists v)\varphi$ în loc de $(\neg (\forall v)(\neg \varphi))$

$\neg \varphi$ în loc de $(\neg \varphi)$

$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \dots \varphi_n$ în loc de $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\dots \varphi_n) \dots))$

Două noțiuni importante și corelate sunt cele de *variabilă liberă* și *variabilă legată*.

(10.4.1) Variabila v este liberă în termenul t dacă

- a) t este v ; sau
- b) t este $F(t_1, \dots, t_n)$ și există termenul t_i ($1 \leq i \leq n$) astfel încât v este liberă în t_i .

(10.4.2) Variabila v este liberă în formula φ dacă

- a) φ este $t_1 = t_2$ și v este liberă în t_1 sau în t_2 ; sau
- b) φ este $P(t_1, \dots, t_n)$ și v este liberă în unul din $t_1, \dots, t_n$; sau
- c) φ este $\neg \psi$ și v este liberă în ψ ; sau
- d) φ este $\psi \wedge \chi$ și v este liberă în ψ sau în χ ; sau
- e) φ este $(\forall v_1)\psi$ și v este liberă în ψ și v_1 este diferită de v .

(10.4.3) Variabila v este legată în φ dacă v nu este liberă în φ și v este liberă într-o subformulă a lui φ .

În cele ce urmează vom scrie $\tau(v_0, \dots, v_n)$ pentru un termen t ale cărui variabile sunt elemente ale mulțimii $\{v_0, \dots, v_n\}$; și vom scrie $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ pentru o formulă ale cărei variabile libere sunt cuprinse în mulțimea $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Cu ajutorul noțiunii de variabilă liberă se poate defini acum noțiunea de propoziție a lui L :

(10.5) O propoziție a lui L este o formulă a lui L fără nici o variabilă liberă. Vom folosi literele σ, τ, θ , eventual cu indici, pentru propozițiile lui L . Să notăm acum următoarea teoremă:

(10.6) Mulțimea tuturor formulelor lui L este:

- a) infinit numărabilă, când L este o mulțime finită sau infinit numărabilă;
- b) de același cardinal cu L , când L este infinit nenumărabilă.

Acum vom trece la cel de-al doilea pas al formalizării limbajului de ordinul întâi L : construirea unui *sistem formal*. În acest scop, avem nevoie de două ingrediente: *axiome logice* și *reguli de inferență*.

I. *Axiomele logice*. Acestea sunt de trei feluri:

1) Axiome propoziționale. Dacă φ este o tautologie a lui $L(S)$, iar ψ este o formulă a lui L care se obține din φ substituind simultan și uniform literele propoziționale din φ cu formule ale lui L , atunci ψ este o axiomă propozițională a lui L . Formula ψ obținută astfel se numește *tautologie a lui L*.

2) Axiome ale cuantificatorilor. Acestea sunt de două tipuri:

(i) Dacă φ și ψ sunt formule ale lui L iar v nu este liberă în φ , atunci următoarea formulă este axiomă:

$$(\forall v) (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall v) \psi)$$

(ii) Dacă φ și ψ sunt formule ale lui L iar ψ se obține din φ înlocuind fiecare apariție liberă a variabilei v cu termenul t în care nu apare nici o variabilă care este legată în φ , atunci următoarea formulă este axiomă:

$$(\forall v) \varphi \rightarrow \psi$$

3) Axiome ale identității. Fie v și v' variabile, $\tau(v_0, \dots, v_n)$ un termen, iar $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ o formulă atomică. Atunci sunt axiome:

(i) $v = v$

$$(ii) v = v' \rightarrow \tau(v_0, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, v_n) = \tau(v_0, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, v_n)$$

$$(iii) v = v' \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, v_{i+1}, v_n) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, v_n).$$

Binecunoscutele proprietăți ale identității se demonstrează ușor:

(10.7) Identitatea este reflexivă, tranzitivă, simetrică. (Este deci o relație de echivalență).

Demonstrație. Reflexivitatea este exprimată prin (i). Simetria identității se demonstrează luând în (iii) pe φ ca $v_1 = v$. Atunci formula următoare este axiomă:

$$v = v' \rightarrow (v = v \rightarrow v' = v)$$

Prin logica propozițională avem

$$v = v' \rightarrow (v = v' \rightarrow v' = v)$$

și, ținând seamă de (i), prin modus ponens deducem

$$v = v' \rightarrow v' = v, \text{ q.e.d.}$$

Pentru a arăta că identitatea este tranzitivă, se ia în (iii) formula φ ca $v_0 = v_1$. Avem:

$$v = v' \rightarrow (v = v_1 \rightarrow v' = v_1)$$

iar prin logica propozițiilor se obține:

$$(v = v' \wedge v = v_1) \rightarrow v' = v_1$$

Ținând cont de simetria identității, aplicată formulei $v = v'$, decurge:

$$(v' = v \wedge v = v_1) \rightarrow v' = v_1, \text{ q.e.d.}$$

II. Regulile de inferență. Alături de regula de detașare (modus ponens), în sistemul L se acceptă:

Regula generalizării: din φ se inferă $(\forall v)\varphi$.

Data fiind construcția sistemului formal L , este posibil să introducem alte noțiuni, precum: 1) noțiunea de mulțime consistentă; 2) noțiunea de teoremă a lui L ; 3) relația: σ este deductibilă din mulțimea de propoziții Σ ; 4) noțiunea de mulțime maximal consistentă (în L) de propoziții etc. În cazul logicii predicatelor, definirea acestor noțiuni nu ridică probleme speciale față de cazul logicii propoziționale. Ceea ce trebuie totuși avut în vedere e, pe de o parte, faptul că în logica predicatelor sunt două reguli de inferență și, pe de altă parte, faptul că în logica predicatelor în inducția asupra complexității formulelor apar formule de tipul $(\forall v)\varphi$. De pildă, ținând seamă de aceste fapte, relația $\Sigma \vdash \sigma$ (σ este deductibilă în L din mulțimea Σ de propoziții) se obține modificând definiția (5.8) în felul următor:

(10.8) Propoziția φ este deductibilă în L din mulțimea Σ de propoziții, în simboluri $\Sigma \vdash \varphi$, ddacă există un șir finit de formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ astfel încât $\varphi = \varphi_n$ și orice formulă φ_m ($0 \leq m \leq n$) este sau o tautologie a lui L , sau aparține lui Σ , sau este inferată prin regula detașării din două formule φ_m și $\varphi_{m'}$ care apar mai devreme în șir (deci: $m' < m$, $m'' < m$), sau, în sfârșit, φ_m este inferată prin regula generalizării dintr-o formulă $\varphi_{m'}$ care apare mai devreme în șir.

Dat fiind faptul că în acest loc nu apar dificultăți speciale care țin de logica predicatelor, nu vom repeta demonstrațiile teoremelor care urmează. Ele sunt lăsate ca exerciții. În teoremele ce urmează, Σ este o mulțime de propoziții, iar σ și τ sunt propoziții.

(10.9) Σ este consistentă dacă orice submulțime finită a lui Σ este consistentă.
 (10.10) Dacă Σ este maximal consistentă, atunci oricare ar fi propozițiile σ și τ ,

- a) $\Sigma \vdash \sigma$ dacă $\sigma \in \Sigma$;
- b) $\sigma \notin \Sigma$ dacă $\neg \sigma \in \Sigma$;
- c) $\sigma \wedge \tau \in \Sigma$ dacă $\sigma \in \Sigma$ și $\tau \in \Sigma$.

(10.11) Teorema deducției. $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \varphi$ dacă $\Sigma \vdash \sigma \rightarrow \varphi$. (Atenție: Σ este o mulțime de propoziții; conform convenției făcute, σ e tot o propoziție; φ este o formulă, deci poate fi o propoziție, deși nu e obligatoriu să fie astfel).

(10.12) Teorema lui Lindenbaum. Orice mulțime Σ consistentă de propoziții din L poate fi extinsă la o mulțime maximal consistentă de propoziții din L .

Fie acum $\Sigma = \phi$ (mulțimea vidă). Vom spune că σ este o *teoremă* a lui L , în simboluri $\vdash \sigma$, dacă $\phi \vdash \sigma$.

§ 11. Noțiunea de satisfacere

Fie propoziția

(1) Bush este american.

Ea este adevărată numai dacă Bush are o anumită proprietate, anume aceea că

(2) *El* este american.

Am subliniat pronumele „el” pentru a arăta că denotă acea persoană care satisface proprietatea de a fi american. Iar respectiva persoană are proprietatea aceea indiferent de felul în care o numim în limbajul nostru, mai mult, indiferent de faptul că noi avem sau nu un nume pentru a vorbi despre ea.

Propoziția (1) este formulată într-un limbaj – limba română. În (1) apare o constantă individuală – „Bush” – și un predicat unar – „american”. Expresia (2) arată care este starea de fapt pe care o denotă propoziția (1), anume că acea persoană pe care o denotă numele „Bush”, deci el, acel om, posedă o anumită proprietate, proprietatea de a fi american – și pe care limbajul nostru o surprinde cu ajutorul predicatului „american”. Starea de fapt nu depinde, desigur, de faptul că în limbaj s-a întâmplat să folosim o anumită expresie – constanta individuală „Bush” – pentru a vorbi despre acea persoană; putem să folosim și alte expresii în acest scop, bunăoară „urmașul lui Reagan la Casa Albă” sau „vicepreședintele S.U.A. în timpul administrației Reagan” etc.; după cum starea de fapt ar fi existat chiar dacă limba română nu ar fi avut la dispoziție nici o expresie care să denote acea persoană.

Acea persoană *are* (sau: *posedă*; sau: *satisface*) proprietatea de a fi american. Relația exprimată aici, între o persoană și o proprietate este una care se constituie

la nivelul lumii, deci este o relație care are loc (sau nu are loc) în lume (lumea reală, în particular). Pe de altă parte însă, relația dintre numele „Bush” și predicatul „american” este una sintactică: cele două simboluri sunt puse împreună în limbaj pentru a forma o propoziție. Când ne întrebăm acum dacă (1) este adevărată, raportăm la „lumea reală” această propoziție. Spunem că ea este adevărată atunci când persoana denotată de „Bush” satisface proprietatea exprimată de predicatul „american”.

Din cele spuse decurge că *a satisface* este o relație între un obiect și o proprietate; mai în general, între un șir $x_1, \dots, x_n$ de obiecte și o relație n -ară. Spunem că obiectul sau obiectele din șir satisfac proprietatea sau relația respectivă. În felul în care a fost construită aici relația de satisfacere, ea nu implică în nici un fel considerente de natură sintactică; ea exprimă ceea ce se întâmplă la nivelul unui model sau al altui model al limbajului.

În cele ce urmează relația de satisfacere va primi însă un cu totul alt înțeles. Ea va fi construită ca un raport între un predicat n -ar și un șir $x_1, \dots, x_n$ de obiecte; de pildă, ca un raport între un predicat unar și un obiect. Intuitiv, în acest din urmă caz, susținerea că obiectul x satisface predicatul P va însemna că *acest obiect* posedă proprietatea exprimată de predicatul P . De pildă, persoana Bush satisface predicatul „american” (predicatul, nu proprietatea!). Trebuie accentuat aici următorul lucru: un obiect x poate să satisfacă un predicat P indiferent de numele pe care l-am folosit pentru a identifica obiectul x și îl satisface chiar dacă acest obiect nici nu are un nume în limbajul din care face parte P .

Concluzia care decurge de aici este următoarea: criteriile folosite pentru a determina dacă o propoziție ca (1) este adevărată *nu* sunt aceleași cu cele folosite pentru a determina dacă Bush – persoana Bush – satisface predicatul „american”. Într-adevăr, în cazul propoziției (1) se procedează astfel:

- a) se determină persoana care reprezintă interpretarea constantei „Bush” în modelul M considerat (în cazul nostru, modelul este o parte a lumii reale);
- b) se determină prin ce proprietate a fost interpretat în M predicatul „american”;
- c) se cercetează dacă persoana respectivă face parte din mulțimea prin care s-a interpretat predicatul.

Dar, pentru a determina dacă persoana Bush satisface predicatul „american”, nu este nevoie de pasul (a). Lipsa acestei constrângeri creează posibilitatea ca un predicat să fie satisfăcut de obiecte care nu au nume în limbaj. Să presupunem, de exemplu, că limbajul L conține predicatul „număr real”. Atunci, pentru a determina valoarea de adevăr a propoziției

(3) 0 este număr real.

se procedează potrivit pașilor (a)–(c). Cum în limbaj există însă un număr cel mult infinit numărabil de nume pentru numere, înseamnă că prin procedura (a)–(c)

nu se poate conchide decât despre elementele unei mulțimi infinit numărabile de numere reale că satisfac predicatul „număr real“. Dar mulțimea numerelor reale este infinit nenumărabilă. Ca urmare, procedura (a)–(c) nu permite să afirmăm că și numerele pentru care nu există nume în limbaj satisfac predicatul „număr real“. Însă, dacă este dată la o parte condiția (a), se poate pune problema dacă este sau nu număr real și un obiect care nu e numit în L .

Utilizarea relației de satisfacere în felul menționat aici prezintă și un alt avantaj. Fie propoziția lui L :

(4) Orice număr real între 0 și 1 este mai mic decât 3.

Propoziția (4) este adevărată atunci când fiecare număr aflat între 0 și 1 satisface predicatul „mai mic decât 3“. Pentru a determina dacă se întâmplă așa, trebuie să luăm fiecare număr x și să-l comparăm cu numărul 3. Dacă de fiecare dată se obține rezultatul că acel număr este mai mic decât 3, atunci se poate conchide că (4) este adevărată.

Să presupunem însă că vrem să aplicăm procedura descrisă de (a)–(c) pentru a determina dacă (4) este adevărată. Pentru acesta, trebuie să producem propoziții de forma (1), deci propoziții în care, alături de predicatul „mai mic decât 3“, apar nume proprii pentru numerele reale considerate, de pildă „0“, „ $1/2$ “, „ $\ln 2$ “, „1“ etc. Se poate spune atunci ceva de genul următor: o propoziție de forma lui (4), deci de forma

(5) $(\forall v) P(v)$

este adevărată ddacă rezultatul punerii oricărui nume propriu pentru obiectele din domeniu în locul variabilei v în expresia $P(v)$ este o propoziție adevărată. De pildă, (4) e adevărată ddacă ori de câte ori înlocuind în formula „ v este mai mic decât 3“ variabila v cu un nume propriu pentru un număr real aflat între 0 și 1, obținem o propoziție adevărată. Or, acest criteriu este inadecvat, fiindcă deși prin respectiva înlocuire obținem desigur numai propoziții adevărate, totuși încă nu putem spune că (4) e adevărată, fiindcă în (4) nu se vorbește numai despre numerele reale dintre 0 și 1 care au nume, ci despre *toate* numerele reale dintre 0 și 1, afirmându-se că *toate* sunt mai mici decât 3. (Asupra acestei proceduri vom reveni mai jos, în capitolul IV, când vom discuta cuantificarea substituțională).

Dar chiar dacă uneori avem nume proprii pentru toate obiectele, încă e posibil ca strategia descrisă mai sus, bazată pe procedura (a)–(c), să nu dea rezultate corecte. Fie următorul exemplu: pe coperta cărții pe care o citește băiatul meu Andrei cu o deosebită plăcere este trecut numele autorului: Tudor Arghezi. Cum „Tudor Arghezi“ este pseudonimul lui Ion N. Theodorescu, înseamnă că Ion N. Theodorescu satisface predicatul „poet apreciat în mod deosebit de Andrei“. Dar propoziția

(6) Ion N. Theodorescu este un poet apreciat în mod deosebit de Andrei.
e falsă, fiindcă Andrei nu știe că „Tudor Arghezi” denotă aceeași persoană ca și „Ion N. Theodorescu”. Pe de altă parte însă, întrucât lui Andrei îi place cartea scrisă de Tudor Arghezi, pe care el o citește, înseamnă că este adevărată propoziția

(7) Tudor Arghezi este un poet apreciat în mod deosebit de Andrei.

Comparând propozițiile (6) și (7), ținând cont de faptul că ele au valori de adevăr diferite, vom conchide: situația că persoana Ion N. Theodorescu satisface predicatul „poet apreciat în mod deosebit de Andrei” (în timp ce propoziția (6) e falsă!) arată că procedura (a)–(c) nu reușește să dea seamă de toate cazurile în care un obiect sau o persoană satisface un predicat.

Exemplul propozițiilor de tip (5) dovedește în plus că, pentru a construi în mod precis noțiunea de satisfacere, este nevoie să se acorde o atenție specială propozițiilor în care apar cuantificatori. În al doilea rând, va trebui să generalizăm noțiunea de satisfacere: va trebui să admitem că ea se poate aplica nu numai predicatelor din L , ci tuturor predicatelor pe care le putem construi cu ajutorul predicatelor din L . Altfel zis, va trebui să putem să o aplicăm tuturor *formulelor* lui L . Într-un caz particular, când formulele considerate au o singură variabilă liberă, vom avea deci să determinăm dacă e adevărată o propoziție de forma

(5') $(\forall v)\varphi$

Să luăm, de pildă, propoziția

(8) Există un număr real între 0 și 1 mai mic decât $4/5$ și mai mare decât $3/4$.

Cum determinăm dacă (8) este adevărată? Dacă definiția relației de satisfacere e dată numai pentru predicatele lui L , nu pentru orice φ , nu vom putea să determinăm valoarea de adevăr a lui (8), în general a unei propoziții de forma

(9) $(\exists v)(P_1(v) \wedge P_2(v))$

Fie acum φ o formulă în care apar – libere sau legate – variabile din mulțimea $\{v_0, \dots, v_n\}$. Problema este de a determina când un șir de $n + 1$ obiecte $x_0, \dots, x_n$ satisface formula φ . Definiția relației: *șirul $x_0, \dots, x_n$ satisface formula φ* presupune însă că ne raportăm la un model M , în domeniul căruia apar obiectele $x_0, \dots, x_n$. Vom proceda în felul următor: mai întâi, vom defini valoarea unui termen t în M pentru șirul $x_0, \dots, x_n$; apoi, relația: *șirul $x_0, \dots, x_n$ satisface în M formula atomică φ* ; în sfârșit, vom extinde prin inducție definiția relației de satisfacere la orice formulă a limbajului L .

(11.1) Definiția prin inducție a *valorii* $t((x_0, \dots, x_n))$ în M a termenului $t(v_0, \dots, v_n)$ pentru șirul de obiecte $x_0, \dots, x_n$:

a) dacă t este v_i , atunci $t((x_0, \dots, x_n))$ este obiectul x_i (al $i + 1$ -lea obiect din șirul $x_0, \dots, x_n$);

b) dacă t este o constantă c , atunci $t((x_0, \dots, x_n))$ este interpretarea $I(c)$ a constantei c în modelul M (evident, $I(c)$ nu depinde de șirul $x_0, \dots, x_n$);

c) dacă t este $F(t_1, \dots, t_m)$, unde F este un simbol funcțional m -ar, atunci $t((x_0, \dots, x_n))$ este $G(t_1((x_0, \dots, x_n)), \dots, t_m((x_0, \dots, x_n)))$ unde G este interpretarea $I(F)$ a lui F în modelul M .

(11.2) Definiția relației: $x_0, \dots, x_n$ satisface formula atomică ϕ în M , în simboluri $M \models \phi((x_0, \dots, x_n))$:

a) dacă ϕ este o formulă $t_1 = t_2$, unde $t_1(v_0, \dots, v_n)$ și $t_2(v_0, \dots, v_n)$ sunt termeni, atunci

$M \models t_1 = t_2((x_0, \dots, x_n))$ ddacă $t_1((x_0, \dots, x_n)) = t_2((x_0, \dots, x_n))$;

b) dacă ϕ este o formulă $P(t_1, \dots, t_m)$, unde P este un simbol predicativ m -ar, iar $t_1(v_0, \dots, v_n), \dots, t_m(v_0, \dots, v_n)$ sunt termeni, atunci

$M \models P(t_1, \dots, t_m)((x_0, \dots, x_n))$ ddacă $R(t_1((x_0, \dots, x_n)), \dots, t_m((x_0, \dots, x_n)))$ unde R este interpretarea $I(P)$ a lui P în modelul M .

(11.3) Definiția inductivă a relației $M \models \phi((x_0, \dots, x_n))$ pentru orice formulă ϕ a lui L :

a) dacă ϕ este o formulă $\neg \psi$, atunci

$M \models \neg \phi((x_0, \dots, x_n))$ ddacă nu e adevărată că $M \models \psi((x_0, \dots, x_n))$

b) dacă ϕ este o formulă $\psi \wedge \chi$, atunci

$M \models \phi((x_0, \dots, x_n))$ ddacă $M \models \psi((x_0, \dots, x_n))$ și $M \models \chi((x_0, \dots, x_n))$

c) dacă ϕ este o formulă $(\forall v_i)\psi$, cu $0 \leq i \leq n$, atunci $M \models \phi((x_0, \dots, x_n))$ ddacă orice șir obținut din $x_0, \dots, x_n$ înlocuind pe x_i cu un obiect oarecare din domeniul A al lui M satisface pe ψ în M , în simboluri

$M \models \phi((x_0, \dots, x_n))$ ddacă pentru orice $x \in A$, $M \models \psi((x_0, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n))$

Ca exercițiu, definiția (11.3) se poate completa pentru cazurile când ϕ este $\psi \vee \chi$, $\psi \rightarrow \chi$, $\psi \leftrightarrow \chi$ sau $(\exists v_i)\psi$. Ținând seamă de faptul că $(\exists v_i)\psi$ este o prescurtare pentru $\neg (\forall v_i)\neg \psi$ avem, de pildă: $M \models (\exists v_i)\psi((x_0, \dots, x_n))$ ddacă există un obiect $x \in A$ astfel încât $M \models \psi((x_0, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n))$

Ideea intuitivă aflată la baza definiției (11.1) este următoarea: termenii limbajului L sunt acele șiruri de simboluri (din L sau logice) care stau pentru obiecte. Un termen t este înțeles ca nume pentru un obiect; într-un model M un termen t numește un obiect x din domeniul A al lui M . Problema e să se determine care este acel obiect numit de t în M . Dacă t este o constantă individuală, atunci, conform cu cele arătate în paragraful 9 mai devreme, t este nume pentru acel obiect din A care corespunde lui t prin funcția de interpretare (funcție care ne este deja dată în acest moment). Deci, dacă $I(t) = x$, atunci, t e nume pentru x în M . Dacă t este de forma $F(t_1, \dots, t_m)$, iar pentru fiecare t_i ($i \leq m$) am determinat, cu ajutorul funcției de interpretare I care este obiectul numit de t_i în M , atunci, cum funcția de interpretare ne dă $I(F) = G$, cu G o funcție $A^m \rightarrow A$, și cum cunoaștem obiectele x_i numite de

argumentele t_i ale lui F , vom ști și valoarea lui G pentru argumentele respective, deci pe $G(x_1, \dots, x_m)$, care e un obiect x numit în M de $F(t_1, \dots, t_m)$. Vom spune că obiectul numit de un termen t în M este valoarea lui t în M .

Lucrurile se complică însă când luăm în considerare *variabilele* individuale. Potrivit definiției (10.1), orice variabilă este un termen și pot fi construiți termeni cu ajutorul variabilelor. Atunci trebuie să dăm sens ideii că și variabilele sunt nume pentru obiecte. Dar, desigur, o variabilă nu e nume pentru un obiect constant; ea este nume pentru un obiect, însă îl numește nu univoc, ci într-un chip ambiguu. În formula „ v este număr real”, variabila v este un nume pentru un număr real, dar nu pentru unul anume: v numește ambiguu acel număr real.

Problema e deci aceea de a trata, relativ la modelul M , și variabilele ca nume pentru obiectele din A . Avem două posibilități:

a) Fiecărei variabile v_i îi atașăm ca valoare un obiect din A ; de pildă, luăm toate obiectele din A , le punem într-o ordine și stipulăm; valoarea lui v_i este al i -1-lea obiect din șirul format. În acest caz variabilele sunt tratate exact ca și constantele individuale; v_i nu mai numește ambiguu un obiect, ci în M această variabilă numește un obiect precis determinat. Pentru a păstra această intuiție, putem proceda astfel: se construiește un model M' care e întru totul la fel cu M , cu excepția faptului că în M' valoarea lui v_i nu mai este al i -1-lea element din șirul nostru, ci, să zicem, al $i+1$ -lea. Desigur că procedând astfel se obține un număr infinit (când A este infinit) de modele de tipul lui M' . A spune că c e o constantă iar v_i o variabilă, care deci e un nume ambiguu, revine la a spune că în toate aceste modele c numește unul și același obiect, dar v_i numește obiecte diferite în modele diferite.

Dificultatea cu această strategie apare atunci când trebuie să determinăm când e satisfăcută în M o expresie precum $(\forall v_i)\psi$. Definiția (11.3), punctul (c), ar trebui refăcută după cum urmează:

$M \models (\forall v_i)\psi$ dacă pentru orice model M' care diferă de M doar prin valoarea acordată termenului v_i , $M' \models \psi$.

În principiu, această definiție nu prezintă neajunsuri formale față de cea cuprinsă în (11.3); dar, potrivit ei pentru a determina dacă o formulă ϕ e satisfăcută într-un model anume suntem obligați să cercetăm nu numai acel model, ci și o infinitate de alte model. Se poate imagina o strategie care permite să se construiască relația de satisfacere fără a ieși din cadrul unui *singur* model? O atare strategie, urmată în definiția (11.1) este aceasta:

b) Unei variabile v_i nu i se poate atașa în chip absolut un obiect din domeniul A al lui M , ci i se poate atașa un obiect *relativ la fiecare șir* $x_0, \dots, x_n$ de obiecte din A . Pentru un alt șir $y_0, \dots, y_n$ de obiecte din A , valoarea lui v_i poate fi diferită (de pildă, când $x_i \neq y_i$). Deci apelul la o infinitate de alte modele M' e înlocuit cu apelul în M la o infinitate de șiruri de obiecte din A .

Strategia a doua pare să fie mai naturală, căci astfel într-un model M variabilei v_i i se atribuie ca valoare un obiect x_i , deci este nume al acelui obiect, dar v_i în continuare îl denotă în chip ambiguu, fiindcă v_i îl numește pe x_i nu în mod absolut, ci relativ la un anumit șir $x_0, \dots, x_n$ de obiecte; iar relativ la un alt șir, v_i va numi alt obiect.

Să reținem și un alt aspect: variabilele sunt *nume*, adică în orice model ele trebuie tratate ca numind un obiect. Variabilele sunt nume *veritabile*.

Fie acum o formulă ϕ care nu are decât o variabilă liberă v ; scriem $\phi(v)$ pentru a evidenția acest fapt. În cazul acesta, putem considera ca șiruri de obiecte șiruri doar cu un obiect, de forma $((x))$ sau $((y))$. Dacă $\phi(v)$ este o propoziție atomică, atunci, potrivit lui (11.2), avem $M \models \phi(v) ((x))$ când:

- 1) v e interpretată ca fiind un nume pentru obiectul x ; și
- 2) ϕ este un simbol predicativ unar P și x satisface predicatul P , adică a) interpretarea lui P în M este o mulțime de obiecte $M(P)$; b) obiectul x aparține acestei mulțimi $M(P)$.

Fie acum relația $M \models (\forall v) \phi(v) ((x))$. Potrivit lui (11.3), punctul (c), relația are loc atunci când orice obiect x din A satisface predicatul ϕ .

În logica propozițiilor s-a arătat (a se vedea propozițiile (2.12) și (3.4)) că valoarea de adevăr a unei propoziții ϕ a limbajului $L(S)$ depinde numai de literele propoziționale (= elemente ale mulțimii S) care apar în ϕ . În logica predicatelor se poate demonstra un rezultat de un tip analog. Fie $\phi(v_0, \dots, v_n)$ o formulă ale cărei variabile, libere sau legate, se găsesc printre $v_0, \dots, v_n$. Să presupunem că în ϕ apar m variabile libere ($m \leq n$) și să presupunem că aceste variabile libere sunt primele $m-1$ în șirul $v_0, \dots, v_n$. Putem scrie atunci pe ϕ ca $\phi(v_0, \dots, v_{m-1}, \dots, v_n)$. Ceea ce vrem să demonstrăm este că într-un model M , pentru un șir $x_0, \dots, x_n$ de obiecte, faptul că avem $M \models \phi((x_0, \dots, x_n))$ nu depinde de toate obiectele din șir, ci numai de primele m . Așadar, pentru a determina dacă $\phi(v_0, \dots, v_{m-1}, \dots, v_n)$ e satisfăcută într-un model M , nu e nevoie să luăm în considerare șiruri mai lungi de m obiecte. Căci se va arăta că un șir $x_0, \dots, x_{m-1}, \dots, x_p$ de obiecte din A satisface sau nu formula ϕ indiferent care sunt obiectele $x_m, \dots, x_p$.

Mai întâi, vom arăta că pentru orice model M :

(11.4) Dacă $t(v_0, \dots, v_n)$ este un termen, iar $x_0, \dots, x_p$ și $y_0, \dots, y_q$ sunt două șiruri de cel puțin n obiecte din A (deci $n \leq p, n \leq q$), atunci, dacă $x_i = y_i$ ori de câte ori v_i este o variabilă a lui t , e adevărat că $t((x_0, \dots, x_p)) = t((y_0, \dots, y_q))$.

Demonstrația se face prin inducție:

a) Dacă $t(v_0, \dots, v_n)$ este o variabilă v_i , atunci avem, conform definiției (11.1), $t((x_0, \dots, x_p)) = x_i$ și $t((y_0, \dots, y_q)) = y_i$.

Dar prin premisă știm că $x_i = y_i$ și deci $t((x_0, \dots, x_p)) = t((y_0, \dots, y_q))$.

b) Dacă $t(v_0, \dots, v_n)$ este o constantă c , iar $I(c) = x$, atunci evident $t((x_0, \dots, x_p)) = x = t((y_0, \dots, y_q))$.

c) Dacă $t(v_0, \dots, v_n)$ este $F(t_0, \dots, t_m)$, unde F este un simbol funcțional m -ar, atunci, potrivit pasului inductiv, (11.4) are loc pentru fiecare dintre termenii t_i ($1 \leq i \leq m$). Fie G interpretarea lui F în M . Atunci avem

$$G(t_1((x_0, \dots, x_p)), \dots, t_m((x_0, \dots, x_p))) = G(t_1((y_0, \dots, y_q)), \dots, t_m((y_0, \dots, y_q))).$$

Pe de altă parte, prin (11.1) se obține

$$G(t_1((x_0, \dots, x_p)), \dots, t_m((x_0, \dots, x_p))) = t((x_0, \dots, x_p)) \text{ și}$$

$$G(t_1((y_0, \dots, y_q)), \dots, t_m((y_0, \dots, y_q))) = t((y_0, \dots, y_q)).$$

Ținând cont de prima identitate, avem imediat

$$t((x_0, \dots, x_p)) = t((y_0, \dots, y_q)), \text{ q.e.d.}$$

Urmează să demonstrăm acum teorema pentru formulele atomare:

(11.5) Pentru orice model M , dacă ϕ este o formulă atomică ale cărei variabile se găsesc printre $v_0, \dots, v_n$, iar $x_0, \dots, x_p$ și $y_0, \dots, y_q$ sunt două șiruri de cel puțin n obiecte din A , atunci dacă $x_i = y_i$ ori de câte ori v_i este o variabilă a lui t , ($i \leq m$), avem:

$$M \models \phi((x_0, \dots, x_p)) \text{ dacă } M \models \phi((y_0, \dots, y_q)).$$

Demonstrație. ϕ poate fi, mai întâi, de formă $t_1 = t_2$, unde $t_1(v_0, \dots, v_n)$ și $t_2(v_0, \dots, v_n)$ sunt termeni. Atunci, folosind pe (11.4), avem

$$t_1((x_0, \dots, x_p)) = t_1((y_0, \dots, y_q))$$

$$t_2((x_0, \dots, x_p)) = t_2((y_0, \dots, y_q))$$

Dacă avem $M \models \phi((x_0, \dots, x_p))$, înseamnă că avem

$$t_1((x_0, \dots, x_p)) = t_2((x_0, \dots, x_p))$$

și, cu cele două identități de mai sus, rezultă imediat că

$$t_1((y_0, \dots, y_q)) = t_2((y_0, \dots, y_q))$$

adică $M \models \phi((y_0, \dots, y_q))$, q.e.d.

În al doilea rând, ϕ poate fi o formulă atomică de forma

$$P(t_1, \dots, t_m), \text{ unde } P \text{ este un predicat } m\text{-ar, iar } t_i(v_0, \dots, v_n) \text{ } (1 \leq i \leq m) \text{ sunt termeni.}$$

Să presupunem că avem $M \models \phi((x_0, \dots, x_p))$. Dacă R e interpretarea lui P în M , obținem

$$R(t_1((x_0, \dots, x_p)), \dots, t_m((x_0, \dots, x_p)))$$

Folosind teorema (11.4), avem pentru orice t_i ($1 \leq i \leq m$)

$$t_i((x_0, \dots, x_p)) = t_i((y_0, \dots, y_q))$$

și deci

$$R(t_1((y_0, \dots, y_q)), \dots, t_m((y_0, \dots, y_q))),$$

adică $M \models \phi((y_0, \dots, y_q))$.

În ambele cazuri, cea de-a doua parte a demonstrației, care exprimă „necesitatea”, se demonstrează prin aceleași procedee.

Teorema care urmează exprimă rezultatul menționat în comentariile informale de mai sus. Ea generalizează pe (11.5) pentru orice formulă ϕ a lui L .

(11.6) Pentru orice model M , dacă ϕ este o formulă ale cărei variabile libere sau legate sunt printre $v_0, \dots, v_n$, iar $x_0, \dots, x_p$ și $y_0, \dots, y_q$ sunt două șiruri de cel puțin n obiecte din domeniul A al lui M , atunci, dacă $x_i = y_i$ ori de câte ori v_i este o variabilă liberă a lui ϕ ($i \leq n$), e adevărat că

$$M \models \phi((x_0, \dots, x_p)) \text{ dacă } M \models \phi((y_0, \dots, y_q)).$$

Demonstrația se face prin inducție, pentru cazurile când ϕ este o formulă 1) $\neg \psi$; 2) $\psi \wedge \chi$; 3) $(\forall v_i) \psi$. Vom demonstra aici numai ultimul caz. Celelalte două sunt lăsate ca exerciții.

Fie deci $\phi = (\forall v_i) \psi$, unde $0 \leq i \leq n$. Următoarele expresii sunt echivalente:

- (i) $M \models \phi((x_0, \dots, x_p))$
- (ii) pentru orice $x \in A$, $M \models \psi((x_0, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p))$
- (iii) pentru orice $y \in A$, $M \models \psi((y_0, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_q))$
- (iv) $M \models \phi((y_0, \dots, y_q))$

A doua și a treia expresie sunt echivalente prin pasul inductiv – căci s-a presupus că (11.6) are loc pentru ψ .

O consecință imediată a teoremei (11.6) se obține astfel: să presupunem că $q > p$ și că, pentru orice i mai mic sau egal cu p , avem $x_i = y_i$. Atunci obținem:

(11.7) $M \models \phi((y_0, \dots, y_p))$ dacă $M \models \phi((y_0, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_q))$. Teorema (11.7) exprimă cu limpezime faptul că dacă variabilele libere din ϕ sunt între $v_0, \dots, v_p$, atunci satisfacerea lui ϕ în M depinde numai de segmentele inițiale de $p + 1$ obiecte $y_0, \dots, y_p$ ale șirurilor $y_0, \dots, y_q$ de obiecte din A .

Fie acum σ o propoziție a lui L . În σ nu apar variabile libere. Să presupunem că toate variabilele legate ale propoziției σ se găsesc printre $v_0, \dots, v_n$. Folosind aici teorema (11.7), conchidem că $M \models \sigma((x_0, \dots, x_n))$ nu depinde de fapt decât de segmentul inițial cu zero elemente al șirului $x_0, \dots, x_n$, adică de segmentul inițial vid al acestui șir. Aceasta, pentru simplul motiv că σ nu are nici o variabilă liberă. Dacă e însă așa, înseamnă că relația $M \models \sigma((x_0, \dots, x_n))$ nu e de fapt afectată de elementele concrete care apar în șirul $x_0, \dots, x_n$. Așadar,

(11.8) Dacă σ este o propoziție, atunci oricare ar fi șirurile $x_0, \dots, x_p$ și $y_0, \dots, y_q$ de obiecte din A (aceste șiruri pot fi și vide), avem:

$$M \models \sigma((x_0, \dots, x_p)) \text{ dacă } M \models \sigma((y_0, \dots, y_q)).$$

Să presupunem că există un șir $x_0, \dots, x_p$ care satisface în M propoziția σ . Atunci, potrivit lui (11.8), orice alt șir $y_0, \dots, y_q$ satisface în M pe σ . De aici decurge imediat că:

(11.8.1) Există un șir $x_0, \dots, x_p$ astfel încât $M \models \sigma((x_0, \dots, x_p))$ dacă oricare ar fi șirul $x_0, \dots, x_q$, $M \models \sigma((x_0, \dots, y_q))$.

Teoremele (11.8) și (11.8.1) arată că, atunci când avem în vedere propozițiile limbajului L , noțiunea de satisfacere nu mai depinde de șirurile de obiecte din domeniul modelului. De aceea, în cele ce urmează de multe ori nici nu vom mai menționa explicit șirul de obiecte și vom scrie simplu $M \models \sigma$ în loc de $M \models \sigma((x_0, \dots, x_p))$.

Noțiunile introduse în acest paragraf și în cel anterior ne permit să definim cu mai multă precizie raportul dintre un *predicat*, așadar o formulă $\varphi(v_1, \dots, v_n)$, și *proprietatea* sau *relația* pe care aceasta o exprimă. Să notăm cu $Mod(L)$ colecția tuturor modelelor limbajului L . Pentru înțelegerea mai bună a noțiunilor ce vor fi definite, ne vom limita la proprietățile unare – deci la proprietățile propriu-zise – adică la proprietățile exprimate de formulele $\varphi(v)$ cu o singură variabilă liberă. Potrivit lui (11.7), șirurile de obiecte de care depinde relația $M \models \varphi$ sunt formate dintr-un singur obiect; le vom nota de aceea cu $((x))$, $((y))$ etc.

(11.9) Se numește *extensiune* a lui φ în modelul M , în simboluri $Ext_M(\varphi)$, mulțimea acelor obiecte din domeniul A al lui M care satisfac formula φ , în simboluri

$$Ext_M(\varphi) = \{ x \in A : M \models \varphi((x)) \}$$

(11.10) Se numește *intensiune* a lui φ , în simboluri Int_φ , acea funcție definită pe mulțimea $Mod(L)$ și care atașează fiecărui model M extensiunea lui φ la M , în simboluri

$$Int_\varphi(M) = Ext_M(\varphi).$$

Vom spune că Int_φ este *proprietatea desemnată* de φ . Să luăm ca exemplu predicatul „președinte al S.U.A.”. Unul dintre modelele limbajului în care apare acest predicat este lumea reală. Să notăm acest model cu K . Extensiunea predicatului „președinte al S.U.A.” în acest model cuprinde toate acele persoane care au îndeplinit realmente funcția de președinte al S.U.A. Fie, de pildă, persoana Bill Clinton. Această persoană este cuprinsă în mulțimea Ext_K (președinte al S.U.A.) dacă relația următoare are loc:

$$K \models \text{președinte al S.U.A.}((\text{Bill Clinton.}))$$

Analog, se verifică faptul că, întrucât

$$K \models \text{președinte al S.U.A.}((\text{G. Washington}))$$

persoana G. Washington e cuprinsă în extensiunea la K a predicatului „președinte al S.U.A.”. Însă, dacă lumea ar fi fost altfel, s-ar fi putut întâmpla ca Bill Clinton să nu ajungă niciodată președinte. Adică, într-un alt model M , diferit de K , relația

$M \models$ președinte al S.U.A. ((Bill Clinton))
nu are loc. De aici decurge că

Ext_K (președinte al S.U.A.) $\neq Ext_M$ (președinte al S.U.A.)

Mulți filosofi au obiectat împotriva acceptării proprietăților ca entități în ontologie pentru motivul că este foarte dificil să se precizeze condițiile în care aceste entități sunt identice sau diferite. Procedura indicată de definiția (11.10) este convenabilă și pentru că reușește să ofere un răspuns provocării ridicate de obiecția menționată.

(11.11) Fie Φ și Ψ proprietățile desemnate de predicatele ϕ și ψ . Atunci:

a) Φ și Ψ sunt identice dacă $Int_\phi = Int_\psi$, adică dacă oricare ar fi modelul M din $Mod(L)$, $Ext_M(\phi) = Ext_M(\psi)$.

b) Φ și Ψ sunt diferite dacă $Int_\phi \neq Int_\psi$ adică dacă există un model M din $Mod(L)$ astfel încât $Ext_M(\phi) \neq Ext_M(\psi)$

(Notă asupra terminologiei folosite: un predicat ϕ denotă într-un model extensiunea lui în acel model și desemnează intensiunea; intensiunea, să accentuăm, nu e relativă la un sau alt model.)

Să luăm, de exemplu, predicatele „om” și „ființă rațională”. Lor le atașăm proprietățile a fi om și a fi ființă rațională. Sunt aceste proprietăți diferite sau nu? În lumea noastră K se pare că cele două predicate au aceeași extensiune, deci

$$Ext_K(om) = Ext_K(ființă\ rațională)$$

Dar pare-se că nu există argumente constrângătoare – dimpotrivă! – pentru a admite că, dacă lumea ar fi fost întrucâtva diferită, ar fi existat ființe raționale altele decât oamenii. Fie M acea altă lume (mulți consideră că M este chiar lumea noastră; pentru a dovedi că cele două proprietăți sunt distincte, chestiunea aceasta nu este relevantă). Așadar, există un model sau lume M în care

$$Ext_M(om) \neq Ext_M(ființă\ rațională),$$

de unde decurge că $Int_{om} \neq Int_{ființă\ rațională}$, adică, prin (11.11), cele două proprietăți nu sunt identice.

Definițiile (11.9) și (11.10) pot fi ușor modificate pentru cazul în care vrem să cercetăm termenii lui L .

4(11.12) Se numește extensiunea sau denotația termenului $t(v_0, \dots, v_n)$ în M , în simboluri $Ext_M(t(v_0, \dots, v_n))$ mulțimea acelor obiecte x din A astfel încât există un și $x_0, \dots, x_n$ de obiecte din A pentru care $t(x_0, \dots, x_n) = x$.

Un caz special îl constituie termenii *singulari* în M , deci termenii care în M au ca denotație o mulțime cu un singur element, altfel zis au un singur denotat. Constantele individuale ale lui L sunt termeni singulari în orice model M (aceasta se observă cu ajutorul definiției (11.1)). Dar și termeni mai complecși, în care apar variabile, pot fi singulari. Fie, de exemplu, termenii aritmetici

$t_1(v) = v + 1$ și $t_2(v) = v$. Dacă F este un simbol funcțional binar definit prin $F(v) = t_1(v) - t_2(v)$, atunci e limpede că întotdeauna $F(v) \leq 1$ și deci în orice model M , $Ext_F(M) = 1$. Alți termeni, precum „autorul *Iliadei*”, pot să aibă în lumi diferite ca denotație a) un singur obiect; b) mai multe obiecte; c) nici un obiect.

(11.13) Intensiunea sau *conceptul individual* desemnat(ă) de termenul t , în simboluri Int_t , este acea funcție definită pe $Mod(L)$ care atașează fiecărui model M denotația lui t la acel model.

Spunem că termenii „autorul *Eticii Nicomahice*” și „profesorul lui Alexandru Macedon” desemnează concepte diferite ddacă există două modele diferite (lumi diferite) în care cei doi termeni au denotații diferite. În cazul lumii reale K avem

$Ext_K(\text{autorul } Eticii \text{ Nicomahice}) = Ext_K(\text{profesorul lui Alexandru Macedon})$. Dar e posibil ca Alexandru Macedon să fi avut, într-o altă lume posibilă, alt profesor. În acea lume M am fi avut

$Ext_M(\text{autorul } Eticii \text{ Nicomahice}) \neq Ext_M(\text{profesorul lui Alexandru Macedon})$.

Reobținem astfel rezultatul intuitiv acceptat că cele două descriții nu „înseamnă” același lucru. (Atenție: dacă în limbajul folosit „Alexandru Macedon” și „*Etica Nicomahică*” sunt constante individuale, atunci în orice model considerat trebuie ca acestea să aibă o denotație nevidă: deci nu vom putea considera o lume posibilă în care, de exemplu, Alexandru Macedon nu există).

Exemplu. Fie L un limbaj care cuprinde 1) o constantă individuală c ; un simbol predicativ P binar; c) o funcție unară f . Așadar,

$L = \{c, P, f\}$. Construim apoi formulele lui L . Sunt termeni, de exemplu, expresiile $f(v)$; $f(c)$; $f(f(c))$. Formule sunt, de exemplu, $(\forall v_1) (\exists v_2) P(v_1, v_2)$; $(\forall v_1) (\forall v_2) ((P(v_1, v_2) \wedge P(v_2, c)) \rightarrow P(v_1, c))$; $P(c, f(f(c)))$. Un model M al limbajului L este, de pildă, următoarea structură: $M = \langle A, R, G, a \rangle$, unde A este o mulțime formată din trei persoane, Ion, Andrei și Mihaela; R este o relație între aceste trei persoane, de pildă relația: are un câștig lunar cel puțin la fel de mare ca; R este, evident, o relație de ordine nestrictă. Să formăm următorul tabel:

al doilea argument primul argument	Ion	Andrei	Mihaela
Ion	1	1	1
Andrei	0	1	0
Mihaela	0	1	1

Numerele 0 și 1 arată dacă relația R are loc între cele două persoane sau nu are loc.

Apoi, G este o funcție unară, de pildă funcția *tată*. Să presupunem că Ion e tatăl Mihaelei, iar Andrei e tatăl lui Ion, deci

$$f(\text{Mihaela}) = \text{Ion}; f(\text{Ion}) = \text{Andrei}.$$

În sfârșit, a este o persoană din A , fie Mihaela aceasta.

În această interpretare, prima formulă (propoziție) a lui L e adevărată, fiindcă relația R este reflexivă și deci oricare ar fi persoana x , avem $R(x, x)$. Propoziția a doua e, de asemenea, adevărată, așa cum se poate vedea ușor. Înțelesul celei de-a treia este că Mihaela are un câștig lunar cel puțin la fel de mare ca al buricului ei, Andrei, ceea ce iarăși se întâmplă, potrivit tabelului nostru.

§ 12. Teorii de ordinul întâi

În paragraful 7 am introdus noțiunea de teorie în $L(S)$ și am menționat câteva rezultate. Simplitatea teoriei modelelor pentru logica propozițională nu a permis însă obținerea unor teoreme „tari”, interesante. Pentru teoriile de ordinul întâi, așa cum vom vedea, pot fi demonstrate rezultate metateoretice cu totul remarcabile. În acest paragraf va fi introdusă noțiunea formală de *teorie de ordinul întâi* și se vor da două exemple de atari teorii.

(12.1) O teorie de ordinul întâi este o mulțime de propoziții ale unui limbaj L de ordinul întâi.

Și în cazul acestor teorii pot fi introduse diverse caracterizări. Din paragraful 7 pot fi preluate fără dificultăți esențiale noțiuni precum cele de:

- a) teorie consistentă;
- b) teorie închisă;
- c) teorie completă;
- d) mulțime de axiome pentru o teorie;
- e) teorie finit axiomatizabilă etc.

Alte noțiuni folosite sunt următoarele:

(12.2) T' este o subteorie a lui T dacă $T' \subseteq T$. Dacă T' este o subteorie a lui T , atunci T este o extindere a lui T' .

(12.3) Fie M un model al lui L . Se numește teoria lui M , în simboluri $Th(M)$, mulțimea propozițiilor lui L adevărate în M . Evident, $Th(M)$ este o teorie completă.

Exemplele de teorii ce vor fi date în acest paragraf sunt *teoria ordinii* și *aritmetica lui Peano*.

a) Teoria ordinii

Această teorie este formulată într-un limbaj $L = \{\leq\}$. L cuprinde deci un singur simbol predicativ – predicatul binar $\leq$ – și nici o constantă individuală

ori simbol funcțional. Intuitiv, „ $\leq$ ” se citește: ...este mai mic decât... Formulele lui L se construiesc potrivit definiției (10.2). Pentru comoditate, vom scrie $v \leq v'$ în loc de $\leq (v, v')$. Următoarea definiție va fi des utilizată:

(12.4) $v_0 < v_1$ ddacă $v_0 \leq v_1$ și $v_0 \neq v_1$.

Intuitiv, $v_0 < v_1$ se citește: v_0 este strict mai mic decât v_1 . Vom spune de aceea că $\leq$ este o relație de ordine nestrictă, iar $<$ o relație de ordine strictă.

(12.5) Teoria T a ordinii parțiale este mulțimea consecințelor în L ale următoarelor axiome:

- a) $(\forall v_0) (\forall v_1) (\forall v_2) (v_0 \leq v_1 \wedge v_1 \leq v_2 \rightarrow v_0 \leq v_2)$
- b) $(\forall v_0) (\forall v_1) (v_0 \leq v_1 \wedge v_1 \leq v_0 \rightarrow v_0 = v_1)$
- c) $(\forall v_0) (v_0 \leq v_0)$

Punctul (a) exprimă faptul că relația $\leq$ este *tranzitivă*; (b) – că această relație este *antisimetrică*, iar (c) – că este *reflexivă*.

Un model pentru T este o pereche $M = \langle A, R \rangle$, unde A este o mulțime nevidă, iar R – o relație tranzitivă, antisimetrică și reflexivă între elementele lui A . Astfel, <mulțimea orașelor din județul Hunedoara, ...are cel puțin la fel de mulți locuitori ca...> sau <mulțimea cărților din biblioteca Facultății de Filosofie, ...a fost citită de studentul B înaintea cărții...> sunt modele pentru T . În ambele, relațiile prin care se interpretează $\leq$ satisfac cele trei propoziții cuprinse în (12.5). Însă, în timp ce în primul model oricare ar fi două obiecte din A – deci oricare ar fi două orașe din județul Hunedoara – are loc fie relația că primul are cel puțin la fel de mulți locuitori ca al doilea, fie că al doilea are cel puțin la fel de mulți locuitori ca primul, în al doilea model nu e obligatoriu ca oricare două cărți să fie legate prin relația de ordine.

Cele două exemple sugerează că, uneori, relația de ordine ($\leq$ sau $<$) are și alte proprietăți în afară de cele cuprinse în (12.5). Pentru relația de ordine strictă, următoarele proprietăți sunt printre cele mai întâlnite:

- (12.6.1) $(\forall v_0) (\forall v_1) (v_0 < v_1 \vee v_0 = v_1 \vee v_1 < v_0)$ (comparabilitate)
- (12.6.2) $(\forall v_0) (\forall v_1) (\forall v_2) (v_0 < v_1 \wedge v_0 < v_2) \rightarrow (\exists v_3) (v_1 < v_3 \wedge v_2 < v_3)$
(direcționare)
- (12.6.3.) $(\forall v_0) (\forall v_1) (v_0 < v_1 \rightarrow (\exists v_2) (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1))$ (densitate)
- (12.6.4) $(\forall v_0) (\exists v_1) (v_0 < v_1)$ (inexistența elementelor maxime)
- (12.6.5) $(\forall v_0) (\exists v_1) (v_1 < v_0)$ (inexistența elementelor minime)

Să notăm cu T_1 teoria care are ca axiome axiomele lui T plus (12.6.1) – (12.6.3) și cu T_2 teoria care are ca axiome axiomele lui T_1 plus axiomele (12.6.4) (12.6.5). Vom spune că T_1 este o teorie a *ordinii dense*, iar T_2 – o teorie a *ordinii dense fără extremi*. Este evident că T , T_1 , T_2 sunt teorii finite

axiomatizabile; în plus, T este o subteorie a lui T_1 , iar T_1 este o subteorie a lui T_2 . Mai puțin triviale sunt următoarele propoziții:

(12.7.1) Orice model al lui T_1 are sau un element, sau o infinitate de elemente (e deci infinit).

(12.7.2) Dacă M_1 și M_2 sunt modele infinit numărabile ale lui T_2 , atunci ele sunt izomorfe.

Fie, de pildă, $M = \langle Q, < \rangle$, unde Q este mulțimea numerelor raționale, iar $<$ relația obișnuită definită pe Q ... este strict mai mic..., un model al lui T . Dar M este un model și pentru T_2 . Într-adevăr, (12.6.1) și (12.6.2) se verifică imediat; (12.6.3) spune că între oricare două numere raționale x și y există un al treilea z . Că e așa, se vede imediat luând pe z ca $\frac{x+y}{2}$; (12.6.4) spune că nu există un cel mai mare număr rațional; într-adevăr, dacă z ar fi astfel, atunci, cum $z + 1$ e tot un număr rațional, avem $z < z + 1$, obținându-se o contradicție; și analog pentru (12.6.5).

Toate proprietățile formulate aici sunt exprimate într-un limbaj de ordinul întâi, în $L = \{ \leq \}$. Relația de ordine are însă și proprietăți care nu pot fi exprimate în acest limbaj. Vom spune că proprietăți precum cele menționate deja, care pot fi exprimate în limbajul L de ordinul întâi, sunt *proprietăți de ordinul întâi*. O proprietate care nu e astfel e dată de propoziția următoare:

(12.8) Relația $<$ definită pe A este *binefundată* dacă orice mulțime de obiecte din A are un element minimal.

Așadar, $<$ este binefundată în cazul următor: fie U o mulțime oarecare de obiecte din A . Atunci, în U există un cel mai mic obiect. De pildă, fie U o mulțime oarecare de numere naturale. Se observă cu ușurință că în U există un cel mai mic număr natural, așadar relația $<$, definită pe numerele naturale, deci în modelul $\langle N, < \rangle$, este binefundată. Dar fie acum modelul $\langle Q, < \rangle$. Să luăm drept U mulțimea numerelor raționale strict mai mari decât 1. Mulțimea U nu are un cel mai mic element. Căci, dacă ea ar cuprinde un cel mai mic număr x , atunci va trebui să cuprindă și numărul $\frac{1+x}{2}$, care este mai mic decât x , dar fiind mai mare decât 1, va aparține de asemenea lui U . Prin urmare, $<$ nu este binefundată pe mulțimea Q .

Dar faptul că $<$ nu este binefundată nu poate fi exprimat într-un limbaj de ordinul întâi. Într-adevăr, o formalizare a lui (12.8) ar putea fi

(12.8.1) $(\forall U) ((\exists v_0) U(v_0) \rightarrow (\exists v_0) (U(v_0) \rightarrow (\forall v_1) (v_1 < v_0 \rightarrow \neg U(v_1))))$

Însă în (12.8.1) apare cuantificatorul $(\forall U)$, în cuvinte: oricare ar fi mulțimea U de obiecte (din A); acesta nu este cuantificatorul introdus în paragraful 10 mai sus, fiindcă el nu se aplică unei variabile individuale – ale cărei valori

sunt, deci, obiecte – ci unei variabile care ia ca valori mulțimi de obiecte. În concluzie, binefundarea nu e o proprietate de ordinul întâi a relației de ordine strictă.

Se poate observa că nici o relație de ordine nestrictă $\leq$ nu este binefundată. Căci, dacă într-o mulțime nevidă oarecare U de obiecte x ar fi un obiect minimal, atunci ar exista întotdeauna un obiect y astfel încât $y \leq x$, anume x însuși.

b) Aritmetica lui Peano

În acest paragraf nu vom expune decât elementele de bază ale aritmeticii lui Peano – AP pe scurt; vom reveni în cele ce urmează pe larg asupra acestei teorii.

Limbajul L_{AP} al aritmeticii lui Peano nu cuprinde nici un simbol predicativ. Dar cuprinde o constantă individuală 0 (zero) și trei simboluri funcționale, unul unar S (funcția succesor) și două binare, $+$ (adunare) și $\cdot$ (înmulțire). Așadar, $L_{AP} = \{0, S, +, \cdot\}$. Pentru a formaliza pe L_{AP} se adaugă conectivele logice, variabilele individuale, cuantificatorul universal, identitatea și parantezele. Termenii lui L_{AP} se definesc inductiv (Să ne amintim că termenii sunt expresiile unui limbaj care denotă obiectele din modele, deci – în modelul standard, intenționat al lui L_{AP} – *numerele naturale*).

(12.9) Definiția termenilor lui L_{AP} :

- a) orice variabilă v_i este un termen.
- b) 0 este un termen;
- c) dacă t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $S t_1$, $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$ sunt termeni.

Intuitiv, aceasta înseamnă că succesorul unui număr, suma și produsul a două numere sunt tot numere. De pildă, termenul $S0$ denotă numărul 1, $SS0$ denotă numărul 2 etc. $1 + 2$ și $1 \cdot 2$ sunt tot termeni și ei denotă numere (numerele 3, respectiv 2) etc.

(12.10) Definiția formulelor atomare ale lui L_{AP} : dacă t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este o formulă atomică.

De exemplu, $0 = 0$, $v_0 = 1$, $1 = 0$ sunt formule atomare.

(12.11) Definiția formulelor lui L_{AP} :

- a) Orice formulă atomică a lui L_{AP} este formulă.
- b) Dacă ϕ și ψ sunt formule ale lui L_{AP} , atunci și $\neg\phi$ și $\phi \wedge \psi$ sunt formule.
- c) Dacă ϕ este o formulă, iar v este o variabilă, atunci $(\forall v)\phi$ este o formulă.
- d) Un șir de simboluri logice sau ale lui L_{AP} este formulă dacă și numai dacă se poate arăta că este formulă prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a) – (c).

Construcția lui L_{AP} ca sistem formal necesită introducerea axiomelor logice. Ele se găsesc expuse în paragraful 10 și pot fi transpuse aici fără nici un

fel de dificultate. În L_{AP} o teorie T este evident o mulțime de propoziții ale lui L_{AP} , iar o teorie închisă este o mulțime de propoziții astfel încât dacă $T \vdash \sigma$, atunci $\sigma \in T$.

Aritmetica lui Peano este o teorie închisă în L_{AP} . O mulțime de axiome pentru L_{AP} este următoarea:

- (12.12) a) $(\forall v) (0 \neq Sv)$
 b) $(\forall v_0) (\forall v_1) (v_0 \neq v_1 \rightarrow Sv_0 \neq Sv_1)$
 c) $(\forall v_0) (v_0 + 0 = v_0)$
 d) $(\forall v_0) (\forall v_1) (v_0 + Sv_1 = S(v_0 + v_1))$
 e) $(\forall v_0) (v_0 \cdot 0 = 0)$
 f) $(\forall v_0) (\forall v_1) (v_0 \cdot Sv_1 = (v_0 \cdot v_1) + v_0)$

g) Oricare ar fi formula $\varphi(v_0, \dots, v_n)$, dacă v_0 este liberă în φ , atunci expresia următoare este axiomă a lui AP:

(SI) $(\forall v_1) \dots (\forall v_n) (\varphi(0, v_1, \dots, v_n) \wedge (\forall v_0) (\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n) \rightarrow \varphi(Sv_0, v_1, \dots, v_n))) \rightarrow (\forall v_0) \varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$

Axioma (a) spune că 0 nu este succesorul nici unui număr; b) garantează că funcția succesor este injectivă: dacă are argumente diferite, atunci are valori diferite. Axiomele (c) și (d), respectiv (e) și (f), dau definiții *recursive* pentru adunare, respectiv pentru înmulțire. Vom spune că o funcție F este definită recursiv dacă se construiește mai întâi $F(0)$ și, în pasul următor, se arată cum se poate construi $F(Sx)$ dacă îl cunoaștem de $F(x)$. Să luăm cazul adunării. Ne interesează să definim adunarea unui număr x cu un altul y . Mai întâi, se construiește adunarea lui x cu 0. Axioma (c) spune că $x + 0$ este x . Acum presupunem că știm cum să îl adunăm pe x cu un număr z . Axioma (d) ne spune cum îl putem aduna pe x cu succesorul Sz al lui z : îl adunăm pe x cu z și apoi construim succesorul numărului obținut.

Prin punctul (g) este formulată *schema axiomatică a inducției* (cf. și (2.13)). Ceea ce trebuie observat aici e faptul că (SI) *nu* este o axiomă; prin (SI) e dată o *infinitate de axiome*, câte una pentru fiecare formulă φ a lui L_{AP} . De pildă, formula φ poate fi $v_0 = 1$, $v_0 + v_1 = v_1 + v_0$, $v_0 \cdot (v_1 + v_2) = v_0 \cdot v_1 + v_0 \cdot v_2$ etc.

Modelul *standard* este $MN = \langle N, 0, S, +, \cdot \rangle$, unde N este mulțimea numerelor naturale, S este funcția succesor, iar $0, +, \cdot$ au înțelesul lor uzual. Un model M al AP este *nonstandard* dacă nu este izomorf cu modelul standard MN .

În orice model M al AP, pentru orice formulă φ a lui L_{AP} , sau $M \models \varphi$ sau $M \models \neg \varphi$. În particular, acest fapt are loc pentru modelul standard MN al AP. Atunci $Th(MN)$ – teoria lui MN , deci mulțimea tuturor propozițiilor adevărate în MN – este completă. Spunem că $Th(MN)$ este *teoria completă a numerelor* (naturale). Evident, modelul standard al acestei teorii este tot MN .

Vom aborda în continuare câteva rezultate (unde dintr-ale vor fi analizate
go în legătură cu paragrafele sau parţile următoare ale cursului):

- a) $\mathcal{A}^*$ nu este complet (teorema lui Gödel);
- b) $\mathcal{A}^*$ nu este nici automatizabilă, dar nu există nici o mulţime finită
de axiome care să-l $\mathcal{A}^*$ (teorema lui Kary-Kardarski);
- c) $\mathcal{P}(\mathcal{A}^*)$ are modele nesfârşit (teorema lui Skolem);
- d) $\mathcal{Q}$ nu este nici automatizabilă, dar $\mathcal{A}^*$ înlocuind pe $\mathcal{Q}$ cu axioma
(nr schema automatizabilă):

$$(\forall x) (x \neq 0 \rightarrow \exists y (x = Sy))$$

$\mathcal{Q}$ este evident finit automatizabilă, dar este şi ea incompletă (teorema lui
Tarski, Mostowski, Robinson).

- e) Teoria obiectelor numerice – teoria având ca axiome pe (a) – (d) şi
(ST) – nu este finit automatizabilă, dar este completă (teorema lui Presburger).

§ 13. Teoremele de completitudine și compactitate

În paragraful 8.1 s-a arătat că relațiile modelul M satisfacție propoziție α relativ la șirul $x_0, \dots, x_n$ de obiecte din domeniul A al lui M nu depinde de faptul de șirul $x_0, \dots, x_n$ aparține $\{1, 2, 1\}$ exprimat exact astfel (vezi: relația de satisfacție este în cazul propozițiilor, în afară de relația între un model și o propoziție și nu e relativă la altceva (de pildă, la un șir $x_0, \dots, x_n$)).

(13.1) Propoziția de este adevărată în modelul M dacă există un șir $x_0, \dots, x_n$ astfel încât (sau, echivalent, pentru orice șir $x_0, \dots, x_n$) $M \models \text{ctf}(x_0, \dots, x_n)$.
 Cu un șirul $x_0, \dots, x_n$ nu este relevant, vom scrie pur și simplu $M \models \alpha$. Altfel spus se cheamă o este adevărată în M , sau: M este un model al lui α ; sau: M satisface pe α ; sau: o este satisfacție de M .

Vom spune că:

a) α e fals în M dacă nu e adevărat că $M \models \alpha$ (echivalent, dacă $M \models \neg \alpha$);

b) o este valabilă dacă o este adevărată în orice model M , în simboluri $M \models \alpha$;

c) o este nevalabilă dacă există un model M în care o este falsă; d) M e o echivalență exactă de propoziții: M este un model al lui Σ , în simboluri $M \models \Sigma$, dacă și numai dacă M este un model pentru toate propozițiile α din Σ ; e) propoziția α este consecința unei propoziții α , în simboluri $\alpha \models \alpha$, dacă și numai dacă α este fals în modelul M și α este fals în modelul M ;

f) propoziția α este consecința unei mulțimi de propoziții Σ , în simboluri $\Sigma \models \alpha$, dacă orice model al lui Σ este și model al lui α ;

g) un model M este *finit* ddacă domeniul său A este o mulțime finită; M este infinit numărabil ddacă A este o mulțime *infinit numărabilă* etc.;

h) două modele M_1 și M_2 ale lui L sunt *elementar echivalente* în simboluri $M_1 \equiv M_2$, ddacă orice propoziție adevărată în M_1 este adevărată și în M_2 , și invers; altfel zis, ddacă $Th(M_1) = Th(M_2)$.

Prin definiția (h) s-a introdus relația „ $\equiv$ ” între modele. Se verifică imediat că aceasta este (i) reflexivă; (ii) simetrică; (iii) tranzitivă, deci este o relație de echivalență între modele. În paragraful 9 fusese introdusă o altă relație de echivalență între modele, cea de izomorfism $\cong$. Relația de echivalență elementară privește *mulțimile de propoziții adevărate* în cele două modele; cea de izomorfism este o relație între *structurile* celor două modele. Întrebarea care se pune imediat e următoarea: sunt cele două relații la fel de tari? Adică, problema e dacă au loc următoarele raporturi:

a) Dacă două modele sunt izomorfe, atunci ele sunt elementar echivalente, în simboluri

dacă $M_1 \cong M_2$, atunci $M_1 \equiv M_2$.

b) Dacă două modele sunt elementar echivalente, atunci ele sunt izomorfe, în simboluri

dacă $M_1 \equiv M_2$, atunci $M_1 \cong M_2$.

Propoziția (a) este adevărată, adică are loc

(13.2) Dacă $M_1 \equiv M_2$, atunci $M_1 \cong M_2$.

Demonstrație. Să presupunem că cele două modele nu sunt elementar echivalente, dar sunt izomorfe. Atunci există o propoziție φ astfel încât $M_1 \models \varphi$, dar $M_2 \models \neg \varphi$. Prin inducție asupra complexității lui φ vom arăta că aceasta contrazice cerința de izomorfism.

(i) Dacă φ este atomară și este de forma $t_1 = t_2$, avem $M_1 \models t_1 = t_2$. Dar $M_1 \models t_1 = t_2$ ddacă $I_1(t_1) = I_1(t_2) = x$. Condiția de izomorfism implică $I_2(t_1) = f(x) = I_2(t_2)$, de unde $I_2(t_1) = I_2(t_2)$, adică $M_2 \models t_1 = t_2$; dar s-a presupus că $M_2 \models \neg(t_1 = t_2)$.

(ii) Dacă φ este atomară și este de forma $P(t_1, \dots, t_n)$, avem $M_1 \models P(t_1, \dots, t_n)$ ddacă $(I_1(t_1), \dots, I_1(t_n)) \in I_1(P)$, adică $(x_1, \dots, x_n) \in R$. Din izomorfismul lui M_1 și M_2 decurge că $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in R' = I_2(P)$. Dar $f(x_1) = I_2(t_1), \dots, f(x_n) = I_2(t_n)$ și deci $(I_2(t_1), \dots, I_2(t_n)) \in I_2(P)$, adică $M_2 \models P(t_1, \dots, t_n)$ – și iarăși se contrazice presupunerea că $M_2 \models \neg P(t_1, \dots, t_n)$.

(iii) Cazurile când φ este o propoziție $\neg\psi$ sau $\psi \wedge \chi$ sau $(\forall v)\psi$ sunt lăsate ca exerciții.

Teorema (13.2) spune următorul lucru: două sisteme – colecții de obiecte, relații și funcții pe aceste obiecte – dacă au aceeași structură (= sunt izomorfe), atunci vor fi caracterizate prin aceleași propoziții (privitoare la acele obiecte,

relații, funcții). Dacă, de pildă, într-o uzină de automobile două produse sunt de același tip, ne putem aștepta ca ele să aibă aceleași performanțe. Tot ca aplicație a teoremei (13.2) poate fi amintit studiul prototipurilor și al modelelor la scară ale unei clădiri, avion sau vapor.

Exercițiu (admițându-se teza identității între minte și corp): ce se poate infera prin această teoremă din situația în care savanții ar produce o copie fizică exactă a lui Bill Clinton?

Să trecem acum la relația (b). Ea susține că două modele (sisteme) care sunt caracterizate prin aceleași propoziții au aceeași structură. Căci, dacă două modele M_1 și M_2 sunt modele pentru aceleași propoziții, dar nu sunt izomorfe, atunci înseamnă că, de pildă, în M_1 are loc o relație $R(x, x')$ între două obiecte din domeniul A_1 , însă în M_2 nu are loc relația corespunzătoare R' între obiectele y și y' din A_2 corespunzătoare celor din A_1 . Să ne amintim că în orice model, pentru orice propoziție φ , sau φ , sau $\neg \varphi$ e adevărată în acel model; în particular, în M_1 e adevărată sau propoziția φ care descrie relația $R(x, x')$, sau cea care afirmă că această relație nu are loc, adică $\neg \varphi$. Desigur însă că prima relație e îndeplinită. Dar φ e falsă în M_2 , fiindcă $M_2 \models \varphi(y, y')$ nu are loc. Atunci ar însemna că φ e adevărată în M_1 și falsă în M_2 , ceea ce încalcă supoziția că cele două modele sunt elementar echivalente.

Raționamentul expus mai sus nu este însă corect. Într-adevăr, în desfășurarea lui s-a presupus la un moment dat că relației $R(x, x')$ îi corespunde propoziția φ . Or, acest lucru trebuie dovedit. Când modelele sunt finite, nu e nici o dificultate să facem ca fiecărei relații din model să-i corespundă o propoziție (atomară) și fiecărei relații funcționale între obiecte să-i corespundă, de asemenea, o propoziție (atomară). În cazul modelelor finite avem deci

(13.3) Dacă $M_1 \equiv M_2$ și M_1, M_2 sunt finite, atunci $M_1 \cong M_2$.

Dar dacă cele două modele sunt infinite, atunci relația (b) nu mai are loc în chip obligatoriu. Un prim exemplu în acest sens va fi oferit chiar în acest paragraf (propoziția (13.11)), ca un corolar al teoremei de compactitate.

Obiectivul principal al acestui paragraf este acela de a demonstra următoarele teoreme:

(13.4) *Teorema de completitudine a lui Gödel.* Oricare ar fi propoziția φ a lui L , φ e teoremă a lui L dacă φ este validă, în simboluri:

$\vdash \varphi$ dacă $\models \varphi$.

(13.5) *Teorema generalizată a completitudinii.* Oricare ar fi mulțimea Σ de propoziții ale lui L , Σ este consistentă dacă are un model.

(13.6) *Teorema de compactitate.* O mulțime Σ de propoziții ale lui L are un model dacă orice submulțime finită a lui Σ are un model.

Vom demonstra mai întâi teorema centrală, (13.5), iar pe celelalte două le vom obține drept corolare ale acesteia. Tehnica de demonstrare a teoremei (13.5), pe care o vom folosi în cele ce urmează, a fost elaborată în 1949 de L. Henkin. Ea se bazează pe următoarea idee: atunci când se construiește un model M pentru un limbaj L , natura elementelor din domeniul acestui model nu e relevantă; nu interesează deci ce sunt obiectele din domeniul A al lui M , nici conținutul concret al relațiilor ori funcțiilor definite în M . E drept că pentru, de pildă, aritmetica lui Peano obiectele din modelul M al acestei teorii ne așteptăm să fie numere; ne așteptăm deci ca M să fie modelul *intenționat*, standard al teoriei. Dar acest lucru nu e necesar: e model al lui AP orice sistem care satisface toate axiomele acestei teorii, indiferent de natura obiectelor din domeniul acestui model.

Ideea lui Henkin a fost următoarea: e posibil să construim un model al unui limbaj L cu ajutorul unor obiecte pe care le avem deja la îndemână, pe care le-am construit deja. Or, noi nu avem la dispoziție, atunci când construim pe AP , de pildă, nimic dat anterior, cu o singură excepție: limbajul L_{AP} . Iar printre expresiile lui L_{AP} se găsesc unele care sunt folosite pentru a desemna obiecte, deci termenii lui L_{AP} . Dintre termeni, unii nu cuprind variabile, deci desemnează în mod obișnuit obiecte constante (numere fixate). Atunci am putea lua ca domeniu al unui model al AP chiar mulțimea acestor termeni constanți al lui L_{AP} .

În general, deci, ideea lui Henkin e următoarea: putem construi un model al limbajului L în care obiectele din domeniu să fie înseși *constantele* limbajului L . În acest caz, relațiile dintre obiecte vor putea fi identificate cu înseși predicatele lui L care se aplică acestor constante individuale, iar funcțiile definite pe acest domeniu cu înseși simbolurile funcționale ale lui L . O consecință imediată a acestei strategii – consecință care va fi exploatată mult în cele ce urmează – e următoarea: în domeniul A al acestui model nu pot să existe mai multe obiecte decât formule ale limbajului L . Căci, cum fiecare obiect din A este o constantă individuală a lui L – fie c aceasta – atunci există propoziția $c = c$, și deci pentru fiecare obiect din domeniu există o formulă a lui L .

Un astfel de model al lui L se numește *model Henkin*.

Această strategie intuitivă nu se poate aplica însă direct pentru a construi un model pentru L . Căci s-ar putea ca limbajul L să nu cuprindă nici o constantă individuală; și vor putea interveni și alte dificultăți. Formularea precisă a strategiei expuse mai sus va necesita, de aceea, anumite complicații. Două dintre ele sunt mai importante:

1) Dacă în L nu avem destule constante individuale care să servească drept obiecte, trebuie să îi adăugăm lui L o mulțime de constante; trebuie să trecem deci la un alt limbaj L' , care cuprinde toate aceste constante, alături de simbolurile lui L . Iar modelele construite vor fi modele ale lui L' .

2) Relația de identitate creează alte complicații. Dacă c și c' sunt două constante individuale ale lui L , atunci într-un model Henkin lor le vor corespunde două obiecte *diferite* (pe care să le notăm tot cu c și c'). Să presupunem acum că într-o mulțime Σ consistentă de propoziții ale lui L e cuprinsă propoziția $c = c'$; atunci, într-un model Henkin al lui Σ această propoziție va fi adevărată. Dar pentru aceasta trebuie ca celor două constante c și c' să le corespundă același obiect din domeniu. Or, am văzut că într-un model Henkin acest lucru nu se poate întâmpla. E nevoie, de aceea, de o anumită sofisticare a modelelor Henkin.

Pentru a face mai ușor de înțeles demonstrația, vom restrânge raționamentele la cazul în care:

a) limbajele L considerate au un număr finit sau cel mult infinit numărabil de simboluri (și deci și de constante individuale); și

b) mulțimea variabilelor individuale $v_0, \dots, v_n, \dots$ folosite în formalizarea lui L este infinit numărabilă, adică $n \in \omega$.

(13.7) Atunci când sunt satisfăcute condițiile (a) și (b) de mai sus, mulțimea formulelor lui L este infinit numărabilă.

Fie φ o formulă a lui L , având cel mult o variabilă liberă. Potrivit axiomelor cuantificatorilor, știm că formula

$$(i) (\forall v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

unde $\varphi(c)$ este rezultatul substituirii în φ a fiecărei apariții libere a lui v cu constanta c a lui L , este teoremă. Așadar,

$$\vdash (\forall v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

Pe de altă parte, formula

$$(ii) (\exists v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

nu este teoremă. Căci dacă ar fi așa, atunci punând $\varphi = (\neg\varphi)$ am obține

$$(iii) (\exists v) - \varphi \rightarrow - \varphi(c)$$

și de aici prin contrapozitie

$$(iv) \varphi(c) \rightarrow - (\exists v) - \varphi$$

$$(v) \varphi(c) \rightarrow (\forall v)\varphi$$

ceea ce, împreună cu (ii), ar da

$$(vi) (\exists v)\varphi \rightarrow (\forall v)\varphi$$

Or, propozițiile (vi) sunt toate adevărate numai în modelele cu un singur obiect în domeniu, ceea ce ar însemna ca toate modelele lui L să aibă un singur obiect.

Fie acum T o teorie formulată în L . T este, desigur, o mulțime de propoziții. Pentru unele formule φ ale lui L cu o singură variabilă este posibil ca

$$(vii) T \vdash (\exists v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

pentru o constantă individuală a lui L . Dar, de bună seamă, nu avem nici o garanție că oricare ar fi formula φ a lui L , din T va fi deductibilă o formulă de tipul

$$(viii) (\exists v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

Dar dacă pentru orice formulă φ a lui L cu cel mult o variabilă liberă este adevărat că

$$T \vdash (\exists v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

pentru un c din L , vom spune că teoria T are martori în L . Fie C mulțimea acelor c care, în acest caz, fac adevărată expresia (vii), pentru orice φ . Vom spune că C este mulțimea martorilor lui T în L .

Situația la care vrem să ajungem este următoarea: ca orice teorie T să aibă o mulțime C de martori. De cele mai multe ori însă, acest lucru nu se întâmplă. De aceea trebuie să facem să se întâmple așa ceva. Vom proceda după cum urmează:

1) limbajului L îi vom adăuga o mulțime C de constante individuale; obținem astfel un nou limbaj L' ;

2) extindem teoria T , formulată în L , la o nouă teorie T' , formulată în L' , pentru care C este mulțimea martorilor ei în L' .

De bună seamă că aici interesează numai teoriile consistente. Căci, dacă T ar fi inconsistentă, atunci (vii) ar fi adevărată pentru orice φ și deci T ar avea automat martori în L . În plus, teoria T' la care este extinsă T trebuie iarăși să fie consistentă;

Trebuie notat de asemenea că dacă pentru o teorie T_1 avem pentru un anumit φ

$$T_1 \vdash (\exists v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

nu e obligatoriu ca pentru o altă teorie T_2 să avem de asemenea

$$T_2 \vdash (\exists v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$$

De aceea, dacă T_1 este extinsă în limbajul L' la o teorie T_1' în care are martori, nu avem garanția că în L' extinderea T_2' a lui T_2 are de asemenea martori. Deci limbajele L' trebuie construite pentru fiecare teorie T în parte.

(13.8) Fie T o mulțime consistentă de propoziții ale lui L . Fie C o mulțime numărabilă infinită $c_0, \dots, c_n, \dots$ de constante individuale care nu aparțin lui L . Să notăm cu $L' = L \cup C$ limbajul obținut prin adăugarea la L a constantelor din C . Atunci există o teorie T' în L' care:

- a) este consistentă;
- b) include teoria T , deci $T \subseteq T'$;
- c) are pe C ca mulțime a martorilor ei în L' .

Demonstrație. Mulțimea formulelor lui L' este și ea infinit numărabilă. În consecință, și mulțimea formulelor cu cel mult o variabilă liberă ale lui L' este

numărabilă. De aceea, putem să aranjăm aceste formule într-un șir $\varphi_0, \dots, \varphi_n, \dots$ ($n \in \omega$). Să construim un șir infinit de teorii

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots T_n \subseteq \dots$$

în felul următor. Fie φ_n a n -a formulă din șirul nostru. Atunci punem

$$T_{n+1} = T_n \cup \{(\exists v_n) \varphi_n \rightarrow \varphi_n(c_n)\}$$

unde v_n este variabila liberă care apare în φ_n , dacă există; și $v_n = v_0$, dacă nu există o astfel de variabilă în φ_n . În șirul de formule ale lui L' pe care îl avem în vedere au apărut, înaintea lui φ_n , formulele $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$. Acestea sunt în număr finit, și fiecare dintre ele conține un număr finit de simboluri din L' . Așadar, în aceste formule au apărut un număr finit de simboluri constante din mulțimea C . Înainte de T_{n+1} în teoriile T_i ($i \leq n$) avem formule de forma $(\exists v_i) \varphi_i \rightarrow \varphi_i(c_i)$ în care, de asemenea, în consecvent au apărut simboluri din C în număr finit. De aceea îl luăm pe c_n ca fiind prima constantă individuală din șirul $c_0, \dots, c_n, \dots$ care nu a apărut în T_n și nici în φ_n .

Acum să arătăm că fiecare T_{n+1} este o mulțime consistentă. Prin inducție am presupus că toate teoriile T_i ($i \leq n$) sunt consistente. Dacă T_{n+1} , la rândul ei, nu este consistentă, atunci am avea

$$T_n \vdash \neg ((\exists v_n) \varphi_n \rightarrow \varphi_n(c_n))$$

adică, prin logica propozițională,

$$T_n \vdash ((\exists v_n) \varphi_n \wedge \neg \varphi_n(c_n))$$

Dar c_n nu apare nici în φ_n , nici în celelalte propoziții din T_n . Așadar, putem conchide prin generalizare universală că

$$T_n \vdash (\forall v_{n+1}) ((\exists v_n) \varphi_n \wedge \neg \varphi_n(v_{n+1}))$$

de unde

$$T_n \vdash (\exists v_n) \varphi_n \wedge (\forall v_{n+1}) \neg \varphi_n(v_{n+1})$$

adică

$$T_n \vdash (\exists v_n) \varphi_n \wedge \neg (\exists v_n) \varphi_n$$

ceea ce contrazice ipoteza că T_n este consistentă.

Acum definim $T' = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Evident, T' include orice T_n și, în particular,

$T = T_0 \subseteq T'$. În al doilea rând, T' este consistentă; într-adevăr, dacă T' nu ar fi consistentă, atunci ar exista o demonstrație $\psi_0, \dots, \psi_m$ a unei contradicții în T' . Or, se poate alege un n astfel încât toate aceste propoziții m să aparțină lui T_n și deci această T_n ar fi contradictorie, ceea ce am presupus că nu e cazul. În sfârșit, T' are pe C ca mulțime a martorilor ei în L' . Căci, dacă φ este o formulă a lui L' cu cel mult o variabilă v liberă, atunci $\varphi = \varphi_n$ pentru un $n \in \omega$ și $v = v_n$. Atunci în T_{n+1} e deductibilă propoziția $(\exists v_n) \varphi_n \rightarrow \varphi_n(c_n)$, pentru un c_n din C . Dar $T_{n+1} \subseteq T'$ și deci această propoziție e deductibilă și în T' , q.e.d.

Să observăm acum următorul lucru: dacă T are o mulțime C de martori în L , iar $T \subseteq T'$, atunci C este o mulțime de martori în L și pentru T' . În particular:

(13.9) Dacă T are o mulțime C de martori în L , atunci ea poate fi extinsă la o mulțime maximal consistentă T' având pe C ca mulțime de martori în L .

Prin lema (13.8) s-a înlăturat prima dificultate în construirea modelelor Henkin. Lema (13.10) va arăta cum putem face față și celei de-a doua dificultăți, care provenea din existența simbolului identitate în formalizarea limbajului L .

(13.10) Fie T o mulțime consistentă de propoziții, iar C o mulțime de martori ai lui T în limbajul L . Atunci T are un model M cu următoarea proprietate: orice obiect din domeniul A al lui M este interpretarea unei constante $c \in C$.

Vom spune că M este *modelul canonic* al lui T .

Demonstrație. Potrivit lemei (13.9), există o teorie T' maximal consistentă care are pe C ca mulțime de martori în L . Vom arăta că T' are un model cu proprietatea cerută. Cum T' e o extindere a lui T , va însemna că acel model e și model al lui T .

Pentru a întâmpina dificultatea (2) menționată înaintea lemei (13.7), vom proceda astfel: interpretăm o constantă c în modelul M nu ca c însăși, ci ca mulțimea tuturor constantelor lui C care în T' stau în relație de identitate cu c . Să presupunem că propoziția $c = c'$ e deductibilă din T' , deci că

$$T' \vdash c = c'$$

Cum T' e maximal consistentă, înseamnă că avem și

$$(c = c') \in T'.$$

Să notăm cu $E(c)$ mulțimea acestor c' ; în simboluri,

$$E(c) = \{c' : (c = c') \in T'\}$$

Fie $d \in L$. Dacă $d \in E(c)$ și $d \in E(c')$, atunci $E(c) = E(c')$. Într-adevăr, avem $(d = c) \in T'$ și $(d = c') \in T'$. Aplicând axiomele identității, avem $(c = c') \in T'$. Dacă pentru un $d' \in C$ avem $d' \in E(c)$ dar $d' \notin E(c')$ atunci înseamnă că $(d' = c) \in T'$, dar $-(d' = c') \in T'$. Însă din $(d' = c) \in T'$ și $(c = c') \in T'$ decurge că $(d' = c') \in T'$ — contradicție. Prin urmare, o constantă individuală $d \in L$ nu poate aparține decât unei singure mulțimi de forma $E(c)$.

Pentru a proba lema (13.10) sunt necesari doi pași: a) să se construiască un model M care să satisfacă proprietatea dorită; b) să se demonstreze faptul că într-adevăr M este un model al lui T' .

a) Modelul M se construiește astfel:

1) Domeniul A al lui M este colecția mulțimilor $E(c)$, în simboluri

$$A = \{E(c) : c \in C\}$$

2) Interpretarea constantelor lui L . Fie $d \in L$. Potrivit axiomelor identității, avem

$$(i) \vdash d = d$$

Prin generalizarea existențială, obținem

$$(ii) \vdash (\exists v) (v = d)$$

Mulțimea T' este consistentă, și deci

$$(iii) T' \vdash (\exists v) (v = d)$$

Să observăm acum că formula $v = d$ conține o variabilă liberă. Cum T' are pe C ca mulțime de martori în L , înseamnă că

$$(iv) T' \vdash (\exists v) (v = d) \rightarrow d = c$$

pentru un $c \in C$. Din (iii) și (iv) decurge

$$(v) T' \vdash d = c$$

Întrucât T' e maximal consistentă, avem $(d = c) \in T'$. Atunci $d \in E(c)$. Am văzut mai devreme că d nu poate aparține unor mulțimi diferite $E(c)$ și $E(c')$. Punem $I(d) = E(c) \in A$.

3) Interpretarea predicatelor lui L . Fie P un predicat m -ar. Lui îi corespunde prin interpretare a relație m -ară R , astfel: pentru orice constante $c_1, \dots, c_m$ din C ,

$$R(E(c_1), \dots, E(c_m)) \text{ dacă } P(c_1, \dots, c_m) \in T'$$

Fie acum m constante $d_1, \dots, d_m$ din L (deci nu neapărat din C). Potrivit celor de mai sus, avem m constante din C astfel încât

$$(d_1 = c_1) \in T' \dots (d_m = c_m) \in T'$$

Să presupunem că avem $P(d_1, \dots, d_m) \in T'$. Potrivit axiomelor identității, decurge că

$$\vdash P(d_1, \dots, d_m) \wedge (d_1 = c_1) \wedge \dots \wedge (d_m = c_m) \rightarrow P(c_1, \dots, c_m)$$

Atunci vom avea și $P(c_1, \dots, c_m) \in T'$ și deci $R(E(c_1), \dots, E(c_m))$. Prin urmare,

$$R(E(c_1), \dots, E(c_m)) \text{ dacă } P(d_1, \dots, d_m) \in T'$$

4) Interpretarea simbolurilor funcționale ale lui L . Dacă F este un simbol funcțional n -ar, atunci $I(F) = G$ este o funcție n -ară $A^n \rightarrow A$. G se definește astfel: oricare ar fi constantele $c, c_1, \dots, c_n$ din C ,

$$G(E(c_1), \dots, E(c_n)) = E(c) \text{ dacă } (F(c_1, \dots, c_n) = c) \in T'$$

Ca și în cazul (3), interpretarea funcției F se construiește și pentru cazul când argumentele și valoarea acestei funcții sunt constante oarecare (nu neapărat din C) ale lui L .

Cu aceasta, trecem la punctul (b) al demonstrației.

b) Trebuie arătat că pentru orice formulă φ ,

$$\varphi \in T' \text{ dacă } M \models \varphi.$$

Demonstrația se face prin inducție asupra complexității lui φ . Vom începe cu formulele atomare ale lui L .

1) Fie t un termen fără nici o variabilă liberă. Atunci, potrivit interpretării simbolurilor funcționale ale lui L (punctul (4) de mai sus), avem

$$M \models (t = c) \text{ ddacă } (t = c) \in T'$$

pentru orice constantă c din C .

În cazul general, trebuie să arătăm că pentru orice t_1 și t_2 ,

$$M \models (t_1 = t_2) \text{ ddacă } (t_1 = t_2) \in T'$$

Să presupunem, într-adevăr, că avem $(t_1 = t_2) \in T'$. Atunci, cum formula $(t_1 = v)$ are o singură variabilă liberă, pe v , înseamnă că

$$((\exists v) (t_1 = v) \rightarrow (t_1 = c)) \in T', \text{ pentru un } c \text{ din } C$$

Dar $(\exists v) (t_1 = v) \in T'$ și deci trebuie că $(t_1 = c) \in T'$. La fel, se arată că $(t_2 = c') \in T'$, pentru un c' din C . Dar, conform celor arătate anterior, avem

$$M \models (t_1 = c) \text{ și } M \models (t_2 = c')$$

Ținând cont, pe de altă parte, că $(t_1 = t_2) \in T'$, avem $(c = c') \in T'$ și deci

$$M \models (c = c')$$

de unde

$$M \models (t_1 = t_2)$$

Invers, să presupunem că avem $M \models (t_1 = t_2)$. Aceasta înseamnă că $I(t_1) = E(c) = I(t_2)$. Din definiția interpretării simbolurilor funcționale ale lui L în M , avem

$$(t_1 = c) \in T' \text{ și } (t_2 = c) \in T'$$

de unde, în chip evident,

$$(t_1 = t_2) \in T'$$

2) Fie φ o formulă atomică a lui L , fără variabile libere. (Atât în acest pas, cât și în cel anterior, am considerat doar formule atomare în care nu apar variabile libere, deci doar propoziții atomare; motivul este acela că ne interesează să demonstrăm că M este model pentru T' , iar T' este o mulțime maximală de propoziții; în T' nu apar formule care nu sunt propoziții.) De pildă, fie $\varphi = P(t_1, \dots, t_m)$. Atunci

$$M \models P(t_1, \dots, t_m) \text{ ddacă } P(t_1, \dots, t_m) \in T'$$

Fie $P(t_1, \dots, t_m) \in T'$. Știm că există $c_1, \dots, c_m$ din C încât

$$(t_1 = c_1) \in T', \dots, (t_m = c_m) \in T'$$

Atunci, întrucât

$$\vdash P(t_1, \dots, t_m) \wedge (t_1 = c_1) \wedge \dots \wedge (t_m = c_m) \rightarrow P(c_1, \dots, c_m)$$

înseamnă că $P(c_1, \dots, c_m) \in T'$ și deci, ținând seamă de definiția lui M ,

$$R(E(c_1), \dots, E(c_m)) \text{ are loc în } M.$$

Dar, pe de altă parte,

$$M \models P(t_1, \dots, t_m) ((E(c_1), \dots, E(c_m))) \text{ ddacă } R(E(c_1), \dots, E(c_m))$$

de unde decurge că

$$M \models P(t_1, \dots, t_m)$$

Invers, să presupunem că $M \models P(t_1, \dots, t_m)$; atunci $R(E(c_1), \dots, E(c_m))$, de unde rezultă că $P(t_1, \dots, t_m) \in T'$. Aplicând iarăși axioma identității, avem

$$\vdash P(c_1, \dots, c_m) \wedge (t_1 = c_1) \wedge \dots \wedge (t_m = c_m) \rightarrow P(t_1, \dots, t_m)$$

de unde decurge că $P(t_1, \dots, t_m) \in T'$.

La fel se poate demonstra când ϕ este o formulă atomică de forma $F(t_1, \dots, t_n) = t$.

3) Rămân cazurile în care

a) $\phi = \neg \psi$

b) $\phi = \psi \wedge \chi$

c) $\phi = (\exists v) \psi$

Primele cazuri vor fi lăsate ca exerciții. Să îl considerăm pe al treilea. Așadar, trebuie să arătăm că

$$M \models (\exists v) \psi \quad \text{dacă } ((\exists v) \psi) \in T'$$

Necesitatea. Să presupunem că $((\exists v) \phi) \in T'$. Dar pentru ca această formulă să fie o propoziție, trebuie ca în ψ să apară cel mult o variabilă liberă. Or, T' are în L o mulțime C de martori, deci

$$((\exists v) \psi \rightarrow \psi(c)) \in T' \text{ pentru un } c \text{ din } C$$

Prin modus ponens, obținem $\psi(c) \in T'$. Potrivit inducției, avem atunci

$$M \models \psi(c)$$

Dar, cum

$$M \models (\psi(c) \rightarrow (\exists v) \psi)$$

decurge că

$$M \models (\exists v) \psi.$$

Invers, dacă $M \models (\exists v) \psi$, atunci pentru un obiect $E(c) \in A$, avem

$$M \models \psi(E(c))$$

adică

$$M \models \psi(c)$$

Prin inducție, știm că $\psi(c) \in T'$. Însă, potrivit axiomelor cuantificatorilor,

$$\vdash \psi(c) \rightarrow (\exists v) \psi$$

și deci $((\exists v) \psi) \in T'$.

Așadar, M este model pentru T' . Întrucât $T \subseteq T'$, înseamnă că M este model și pentru T , q.e.d.

Cu aceasta, sunt pregătite condițiile pentru a demonstra teoremele (13.4), (13.5) și (13.6).

Demonstrația teoremei (13.5):

1. Necesitatea. Presupunem că mulțimea Σ de propoziții ale lui L are un model M și să arătăm că ea este consistentă. Dar dacă nu ar fi consistentă, ar exista o demonstrație $\phi_1, \dots, \phi_n$ a lui $(\psi \wedge (\neg \psi))$ din Σ .

Exercițiu: să se arate că orice φ_i este adevărată în M . Cum $\varphi_n = (\psi \wedge (\neg\psi))$ nu poate fi adevărată în nici un model M , să se deducă faptul că $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nu e o demonstrație a lui φ_n – deci că se obține o contradicție.

2. Suficiența. Presupunem că Σ e consistentă și să arătăm că are un model. Mai întâi vom arăta că o extindere a ei Σ' are un model. Construim un limbaj $L' = L \cup C$, astfel încât, potrivit lemei (13.8), extinderea în L' a lui Σ – anume Σ' – are pe C ca mulțime de martori. În al doilea rând, lema (13.10) arată că există un model M' al lui Σ' în L' . Deoarece $\Sigma \subseteq \Sigma'$, înseamnă că M' e un model și al mulțimii Σ , în simboluri $M' \models \Sigma$. Să notăm că M' este un model al lui Σ în limbajul L' . Dar L' diferă de L doar prin faptul că are în plus anumite constante. Deci dacă în definiția lui M' nu avem în vedere că unele obiecte sunt interpretări ale constantelor din C , obținem un model M'' , care

- 1) e un model al Σ ;
- 2) e un model al lui Σ în limbajul L , q.e.d.

Trecem acum la teorema (13.4). Ea arată că clasa teoremelor lui L este aceeași cu clasa propozițiilor valide ale lui L .

1. Suficiența: Dacă o propoziție σ este teoremă, atunci este validă. Să presupunem că σ este teoremă. Atunci există o demonstrație $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \sigma$ a lui σ în L . Prin inducție se arată că orice formulă φ_i este adevărată în orice model M al lui L , și deci $\varphi_n = \sigma$ este adevărată în orice model M al lui L .

2. Necesitatea: Dacă o propoziție σ este validă, atunci este teoremă. Adică: dacă σ e adevărată în toate modelele M ale lui L , atunci σ este teoremă. În logica propozițională există tautologia (= legea contrapozției):

$$\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi))$$

Aplicând-o aici, decurge că ceea ce trebuie să deducem este că: dacă σ nu este o teoremă, atunci σ nu este adevărată în toate modelele lui L . Deci există un model M în care $\neg\sigma$ e adevărată, în simboluri $M \models \neg\sigma$. Să presupunem deci că σ nu e teoremă. Dar σ e teoremă ddacă $\{\neg\sigma\}$ e inconsistentă. Așadar, dacă σ nu e o teoremă, înseamnă că $\{\neg\sigma\}$ e o mulțime consistentă de propoziții. Atunci, potrivit teoremei (13.5), $\{\neg\sigma\}$ are un model M , deci $M \models \neg\sigma$, q.e.d.

În sfârșit, să demonstrăm teorema de compactitate, (13.6): o mulțime Σ de propoziții are un model ddacă orice submulțime finită Γ a lui Σ are un model.

1. Suficiența: Dacă M e un model al lui Σ , atunci e model și pentru submulțimea finită Γ a lui Σ . Acest lucru este evident, ținând seamă că M e model al lui Σ ddacă M e model pentru orice propoziție din Σ , deci și pentru orice propoziție din Γ .

2. Necesitatea: Dacă oricare ar fi mulțimea finită $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ are un model, atunci există un model al lui Σ . Într-adevăr, să presupunem că orice astfel de

Γ are un model, dar că Σ nu are nici un model. Atunci, potrivit teoremei (13.5), înseamnă că Σ nu este consistentă. Adică, $\Sigma \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$. Prin urmare, există o demonstrație $\varphi_1, \dots, \varphi_n = (\psi \wedge \neg\psi)$ în care intervin un număr finit m ($m \leq n$) de propoziții din Σ . Fie Γ mulțimea acestora. Dar Γ e inconsistentă, așadar, iarăși potrivit teoremei (13.5), Γ nu are nici un model – ceea ce contrazice supoziția făcută, q.e.d.

O aplicație a teoremei de compactitate

Teorema de compactitate are multe aplicații interesante. Una dintre acestea e următoarea: în paragraful anterior am menționat modelul standard MN al aritmeticii lui Peano. Propozițiile adevărate în acest model, $Th(MN)$, formează o mulțime maximal consistentă de propoziții ale lui L_{AP} . Așadar, pentru oricare propoziție a acestui limbaj, sau aceasta sau contradictoria ei e adevărată în MN și, deci, aparține lui $Th(MN)$. Ar decurge de aici că am obținut o teorie de ordinul întâi – anume, $Th(MN)$ – care caracterizează numerele naturale, adică ea are ca modele numai sisteme de felul lui MN (deci: modelele lui $Th(MN)$ sunt MN însuși și modelele izomorfe cu MN).

Această concluzie este însă falsă; pentru că există modele M ale lui L_{AP} care sunt elementar echivalente cu MN , dar nu sunt izomorfe cu acesta. Putem demonstra că e așa apelând la mai multe metateoreme ale logicii predicatelor. Teorema de compactitate se poate deja folosi chiar aici pentru a produce un model nestandard al AP .

Fie $L_{AP} = \{0, S, +, \cdot\}$ limbajul aritmeticii lui Peano. Vom construi un nou limbaj $L' = L_{AP} \cup \{c\}$, adăugând lui L_{AP} o constantă c . Să observăm că în L_{AP} – și deci și în L' – pot fi definite diverse relații între numere, de exemplu relația $<$ (n este (strict) mai mic decât m), în felul următor:

$$n < m = \text{df. } (\exists v) (n + Sv = m)$$

Acum, construim o teorie Σ în felul următor: Σ este $Th(MN)$, căreia i se adaugă propozițiile

$$\begin{aligned} 0 &< c \\ 1 &< c \\ 2 &< c \\ &\vdots \end{aligned}$$

pentru orice n . Vom arăta că Σ are un model. Într-adevăr, fie Γ o parte oarecare finită a lui Σ . În Γ sunt menționate numere; dar acestea nu pot fi decât în număr finit, fiindcă Γ e finită. Fie n cel mai mare dintre acestea. Atunci, luăm ca model al lui Γ modelul standard MN , în care interpretăm pe c ca Sn . Dacă

o propoziție σ din Γ aparține lui $Th(MN)$, atunci sigur e adevărată în MN ; dacă nu aparține lui $Th(MN)$, atunci e de forma $m < c$. Dar și atunci această propoziție e adevărată, căci interpretarea lui c în MN e luată ca mai mare decât orice număr menționat în Γ , deci și decât m .

Întrucât Γ e o submulțime oarecare finită a lui Σ , prin teorema de compactitate (13.6) decurge că Σ are un model M . Dar, cum $Th(MN)$ e inclusă în Σ , înseamnă că M este model și pentru $Th(MN)$. În M sunt adevărate exact aceleași propoziții ale limbajului L_{AP} al aritmeticii lui Peano care sunt adevărate și în modelul standard al acestei teorii. Însă în M există un obiect (interpretarea lui c) care e mai mare decât toate numerele naturale. În M există un obiect care e un număr infinit. Acest model M este deci un model *nestandard* al aritmeticii lui Peano (și al teoriei complete a numerelor). El are următoarele caracteristici:

1) este elementar echivalent cu MN , căci în M și MN sunt adevărate exact aceleași propoziții ale lui L_{AP} , anume cele din $Th(MN)$;

2) nu este izomorf cu MN , căci obiectului infinit din domeniul lui M nu-i corespunde nimic în domeniul lui MN .

Așadar, să scriem:

(13.11) Teoria completă a numerelor $Th(MN)$ are un model nestandard.

Acest rezultat ne arată că nu putem întări teorema (13.3) pentru a afirma că dacă două modele sunt elementar echivalente, atunci ele sunt și izomorfe.

Cum arată un astfel de model nestandard al teoriei complete a numerelor? (Un rezultat surprinzător este, cum vom vedea, următorul: dacă în domeniul lui apare un obiect infinit, atunci vor trebui să apară infinit de multe astfel de obiecte infinite). Pentru a răspunde acestei întrebări, vom proceda astfel: MN și M sunt elementar echivalente, adică în ele sunt adevărate exact aceleași propoziții ale limbajului L_{AP} al aritmeticii lui Peano. Plecând de aici, ori de câte ori numerele naturale au o anumită proprietate – adică ori de câte ori o propoziție σ e adevărată în MN – conchidem că obiectele din domeniul lui M au aceeași proprietate (căci σ e adevărată și în M). Apoi, încercăm să descifrăm ce spune acea propoziție despre obiectele din domeniul lui M .

Fie deci $M = \langle A, z, s, \&, \$ \rangle$. Aici A este domeniul lui M , z este obiectul din A prin care e interpretată constanta 0, deci $I(0) = z$, și mai departe $I(S) = s$, $I(+)$ = $\&$, $I(\cdot)$ = $\$$. Să numim obiectele din A *NUMERE* (obiectele din domeniul lui MN vor fi numite în continuare *numere*). Pentru a-l construi pe M , să plecăm de la unele propoziții adevărate în MN . În MN se poate defini, așa cum am văzut, relația de ordine strictă *mai mic decât*. Prin urmare, o putem defini și în M . Vom nota această relație cu $\{$. Cum în MN e adevărat că

$$(\forall v) - (v < v)$$

înseamnă că în M această propoziție e de asemenea adevărată și deci că oricare ar fi NUMĂRUL x , nu e adevărat că $x \nless x$. Relația $<$ și deci și $\nless$ este totală, adică

$$(\forall v_1) (\forall v_2) (v_1 < v_2 \vee v_2 < v_1)$$

Apoi, știm că orice număr este fie par, fie impar. Adică, dacă x e un număr, atunci există un alt număr y astfel încât

$$x = y + y \text{ sau } x = y + y + 1$$

Analog, în M pentru fiecare NUMĂR x există un NUMĂR y astfel încât

$$x = y \ \& \ y \text{ sau } x = y \ \& \ y \ \& \ 1$$

În sfârșit, să observăm că în MN orice număr (cu excepția lui 0) este succesorul unui singur număr. Prin urmare, putem defini o funcție R inversă celei de succesor S , în felul următor:

$$R(0) = 0$$

$$R(Sx) = x$$

Prin S , lui 2 îi corespunde 3; prin R , lui 3 îi corespunde 2 etc. În modelul M , se construiește deci o funcție r , definită prin:

$$r(z) = z$$

$$r(s(x)) = x$$

Acum vom trece la cercetarea efectivă a felului cum arată modelul M . În primul rând, în M există un NUMĂR care corespunde lui zero, e deci NUMĂRUL zero în M , anume z . Cu ajutorul funcției s , construim acum o submulțime a lui A , formată din toți succesorii lui z :

$$z, s(z), s(s(x)), s(s(s(z))), s(s(s(s(z)))) , \dots$$

Vom numi aceste obiecte NUMERE standard. Șirul acestora este, așa cum se vede cu ușurință, izomorf cu șirul 0, 1, 2, 3, 4, ... al numerelor naturale. Într-adevăr, oricărui număr natural îi corespunde un și numai un NUMĂR standard, iar $n < m$ dacă $f(n) \nless f(m)$.

Intenția noastră e de a pune într-un șir toate NUMERELE (să ne amintim că mulțimea A este numărabilă). În acest șir, segmentul inițial va fi construit de NUMERELE standard. Știm însă că în M există NUMERE care nu sunt standard, care sunt mai mari decât orice NUMĂR standard. Aceste NUMERE vor urma în șir *după* ce am cuprins în acesta toate NUMERELE standard.

Fie acum două NUMERE x și y . Vom spune că ele sunt M -echivalente dacă există un NUMĂR standard a astfel încât $x \ \& \ a = y$ sau $y \ \& \ a = x$. Intuitiv, aceasta înseamnă că putem obține pe cel mai mare dintre ele aplicând asupra celuilalt, de un număr *finit* de ori, funcția z . Evident, oricare două NUMERE standard sunt M -echivalente. Într-adevăr, să presupunem că m este strict mai mare decât n și că ambele NUMERE sunt standard. NUMĂRUL m a fost obținut

într-un

aplicând de m ori funcția s asupra lui z , iar n – aplicând de n ori funcția s asupra lui z . Așadar, există NUMĂRUL finit $m+n$ care e cel căutat. Pe de altă parte însă, nici un NUMĂR standard nu este M -echivalent cu unul nestandard c . Căci să presupunem că c ar fi M -echivalent cu un NUMĂR standard m ; dacă însă aplicăm de un număr finit de ori, fie acesta n , funcția s asupra lui m , obținem NUMĂRUL $m+n$, care e la rândul lui standard.

Dacă x e un NUMĂR, vom spune că *segmentul* lui x e mulțimea tuturor NUMERELOR M -echivalente cu x .

Toate NUMERELE standard – deci toate NUMERELE care corespund numerelor naturale – fac parte dintr-un singur segment, cel care începe cu z (și nici un NUMĂR nestandard nu face parte din acest segment). Acest segment standard e infinit, dar numai într-o singură direcție, spre NUMERE mai mari. Fie acum c un NUMĂR nestandard. Segmentul lui x nu este cel standard, căci atunci ar trebui ca c să fie M -echivalent cu un NUMĂR standard, ceea ce am văzut că nu e posibil. Atunci:

1) Orice succesori al lui c este a) în același segment cu c ; b) nestandard. Prin urmare, în segmentul lui c avem șirul infinit

$c, s(c), s(s(c)), s(s(s(c))), s(s(s(s(c))))$, ...

2) Orice predecesor al lui c este a) în același segment cu c ; b) nestandard. Prin urmare, în segmentul lui c avem șirul infinit

... $r(r(r(c))), r(r(r(c))), r(r(c)), r(c), c$

Se poate verifica ușor că cele două propoziții sunt adevărate. Din ele decurge că segmentul lui c este un șir infinit în ambele direcții: și spre NUMERE mai mari, și spre NUMERE mai mici, deci e de forma:

... $r(r(r(c))), r(r(c)), r(c), c, s(c), s(s(c)), s(s(s(c))),$...

Acest șir este izomorf cu mulțimea *numerelor întregi*, unde c stă pentru 0, $s(c)$ pentru 1, $r(c)$ pentru -1 etc. În general, succesorii lui c corespund întregilor pozitivi, iar predecesorii lui c – întregilor negativi.

Segmentul lui c stă, în șirul tuturor NUMERELOR, pe care vrem să-i construim, după segmentul standard.

Dar, ne putem întreba: există un *singur* segment nestandard? Răspunsul la această întrebare este parte a teoremei (13.12), care rezumă felul în care arată un model nestandard numărabil al teoremei complete a numerelor:

(13.12) Elementele domeniului unui model nestandard numărabil al teoriei complete a numerelor pot fi linear ordonate de relația de ordine strictă $\{$ și:

a) segmentul inițial al șirului astfel obținut este segmentul standard, care este izomorf cu numerele naturale;

b) orice segment nestandard este izomorf cu șirul numerelor întregi;

c) între orice segment nestandard și segmentul standard se intercalează un alt segment nestandard;

d) între oricare două segmente nestandard se intercalează un alt segment nestandard.

Punctele (a) și (b) au fost probate mai devreme. Punctele (c) și (d) afirmă, în esență, următorul lucru: fie SEGM mulțimea tuturor segmentelor de NUMERE din M . Această mulțime – așa cum se poate constata ușor – este ordonată de o relație de ordine strictă $<$. Într-adevăr, putem pune:

$X < Y = \text{df. există un } x \in X \text{ și un } y \in Y \text{ astfel încât } x \nless y \text{ și } x \text{ și } y \text{ nu sunt } M\text{-echivalente.}$

Dacă are loc condiția din definiens, evident că are loc și relația:

oricare ar fi $x \in X$ și $y \in Y$, $x \nless y$.

Punctele (c) și (d) afirmă că $<$ este o relație de ordine strictă pe SEGM care:

1) admite segmentul standard ca element minimal (a se vedea definiția (12.6.5));

2) este densă (a se vedea definiția (12.6.3)).

Decurge de aici că șirul SEGM de segmente de NUMERE este izomorf cu șirul numerelor raționale pozitive.

Vom demonstra punctul (c) al teoremei (13.12); punctul (d) este lăsat ca exercițiu.

Să presupunem că există un segment nestandard X în SEGM care urmează imediat după segmentul standard. Să presupunem că NUMĂRUL d aparține lui X . Dar d este sau par sau impar. Prin urmare, există un NUMĂR c astfel încât

$$c \& c = d \text{ sau } c \& c \& s(z) = d$$

Să luăm primul caz (în celălalt raționamentul decurge analog). NUMĂRUL c , potrivit supoziției făcute, aparține sau segmentului standard, sau lui X . Dacă c e standard, atunci desigur că și d trebuie să fie standard, ceea ce încalcă supoziția făcută. Prin urmare, c este nestandard. Presupunem acum că c aparține de asemenea segmentului X . Potrivit definiției segmentului, aceasta înseamnă că c și d sunt M -echivalente, adică (ținem aici seamă de faptul că $c \nless d$) există un NUMĂR standard x astfel încât

$$c \& x = d.$$

Dar cum, pe de altă parte, am presupus că $c \& c = d$, avem

$$c \& c = c \& x$$

de unde decurge că

$$c = x$$

ceea ce contrazice faptul că c nu este un NUMĂR standard. Așadar,

1) c nu este un NUMĂR standard;

2) $c \nless d$;

3) c nu aparține segmentului X ; c va aparține unui alt segment Y , iar Y trebuie să fie nestandard – ceea ce contrazice ipoteza că X urmează în șirul SEGM imediat după segmentul standard, q.e.d.

§ 14. Teoremele Löwenheim-Skolem

Teoremele care vor fi formulate în acest paragraf, la fel ca și teorema de compactitate, sunt teoreme de *caracterizare* a logicii de ordinul întâi a predicatelor (cf. paragraful 16 în acest sens). Mai direct, ele probează următorul lucru: în logica de ordinul întâi, nu putem distinge între

- 1) mulțimi finite și mulțimi infinite;
- 2) mulțimi infinite numărabile și mulțimi infinite nenumărabile.

Aceasta în sensul următor: 1) o teorie care are un model finit, dar arbitrar de mare, are și un model infinit; 2) o teorie are un model infinit numărabil dacă are și unul infinit nenumărabil. Decurge de aici că nu putem spera ca, apelând la teorii de ordinul întâi, să caracterizăm mulțimile finite, ori pe cele infinite numărabile, ori pe cele infinite nenumărabile. În logica de ordinul întâi nu putem defini noțiunile de finit și infinit (numărabil sau nenumărabil). Într-adevăr, se poate demonstra că:

(14.1) Dacă o teorie T are modele finite oricât de largi, atunci are și un model infinit.

(14.2) *Teorema descendentă Löwenheim-Skolem*. Dacă o teorie T are un model infinit, atunci are și un model infinit numărabil.

(14.3) *Teorema ascendentă Löwenheim-Skolem*. Dacă o teorie T are un model infinit, atunci are un model infinit de orice putere (în particular, dacă are un model infinit numărabil, atunci are un model infinit nenumărabil).

Demonstrația teoremei (14.1). Presupunem că teoria T , formulată în limbajul L , are modele finite oricât de largi. Adică, pentru orice număr natural n , T are un model în al cărui domeniu se află cel puțin n obiecte. Fie acum un nou limbaj L' construit prin adăugarea la L a unui număr infinit de constante c_i ($i \in \omega$). Aceste constante presupunem că nu aparțineau lui L . În acest nou limbaj construim o nouă teorie T' adăugând lui T toate propozițiile de forma

$$-(c_i = c_j), \text{ cu } i < \omega, j < \omega, i \neq j.$$

Ideea demonstrației este să arătăm că teoria T' are un model. Cititorul care a înțeles sensul teoremei de compactitate va bănui imediat, din chiar felul în care a fost formulată teorema (14.1), că pentru a dovedi că T' are un model trebuie arătat că orice submulțime finită a lui T' are un model, din care prin compactitate va decurge că și T' are un model. Fie deci Γ o submulțime oarecare finită a lui T' . În Γ vor apare cel mult constantele $c_1, \dots, c_m$, pentru un număr

finit m . Știm că T are modele finite arbitrar de largi. Atunci va avea și un model M_n cu un număr $n > m$ de obiecte în domeniu. Să arătăm că acest model M_n e și un model al lui Γ . Dacă o propoziție σ a lui Γ aparține lui T , atunci sigur σ e adevărată în M_n , fiindcă în acest model sunt adevărate toate propozițiile din T . Dacă însă σ din Γ nu aparține lui T , înseamnă că este o propoziție de forma

$$\neg(c_i = c_j)$$

unde, potrivit supoziției, $i < m, j < m, i \neq j$. Cum în domeniul A al lui M_n există $n > m$ obiecte, înseamnă că putem interpreta în M_n constantele individuale c_i, c_j ($i, j < m$) astfel încât $I(c_i) \neq I(c_j)$ și deci astfel încât orice propoziție de forma indicată de mai sus din Γ să fie adevărată în M_n . Așadar, M_n e model al lui Γ .

Atunci, prin teorema de compactitate, teoria T' are un model M . Dar T este inclusă în T' , deci M este un model și pentru T . Așa cum am procedat în demonstrația teoremei (13.5) (suficiența), putem considera numai reducerea M' a acestui model M la limbajul L : M' e atunci un model al limbajului L pentru T și este, evident, infinit.

Să trecem acum la teoremele Löwenheim-Skolem. Teorema descendentă se obține cu ușurință din teorema generalizată a completitudinii (13.5). Să presupunem, într-adevăr, că teoria T are un model. Potrivit lui (13.5), înseamnă că T este consistentă. Atunci ea are, conform lemei (13.10), un model canonic M . În acest model fiecare obiect este interpretarea unei constante individuale c . Însă în limbajul lui T nu există decât cel mult un număr infinit numărabil de constante individuale – și deci domeniul lui M nu poate cuprinde decât cel mult un număr infinit numărabil de obiecte, q.e.d.

Teorema ascendentă Löwenheim-Skolem se demonstrează asemănător cu teorema (14.1). Fie teoria T formulată în limbajul L , care are un model infinit numărabil. Fie acum C o mulțime infinit nenumărabilă de constante individuale c_α care nu apar în L . Se construiește în $L' = L \cup C$ mulțimea

$$T' = T \{ \neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha \neq \beta \}$$

La fel ca la (14.1) se arată că T' are un model. Atunci, prin (13.5), T' este consistentă și, prin (13.10), are un model canonic în care fiecare obiect este interpretarea unei constante c_α . Evident, acest model este infinit nenumărabil, q.e.d.

Teoremele Löwenheim-Skolem sunt unele dintre cele mai tulburătoare rezultate obținute în logică. Vom menționa două contexte în acest sens.

Mai întâi, să vedem ce se întâmplă dacă încercăm să aplicăm aceste teoreme celor mai importante teorii formalizate în logica predicatelor de ordinul întâi – *aritmetica lui Peano* și *teoria mulțimilor*.

(14.4) Aritmetica lui Peano admite un model infinit nenumărabil.

(14.5) Teoria completă a numerelor admite un model infinit nenumărabil.

Desigur, (14.4) decurge din (14.5), fiindcă AP e inclusă în $Th(MN)$. Teorema (14.5) se demonstrează ușor: $Th(MN)$ are un model infinit numărabil, anume MN . Prin teorema ascendentă Löwenheim-Skolem, există un model infinit nenumărabil pentru $Th(MN)$. Evident, acest model este *nestandard*. Așadar,

(14.6) Aritmetica lui Peano are un model nestandard.

Am obținut astfel o nouă demonstrație pentru (13.11).

Să trecem acum la teoria mulțimilor TM . În TM există axioma infinitului, care asigură că există cel puțin o mulțime infinită numărabilă. În TM se demonstrează de asemenea teorema lui Cantor, potrivit căreia mulțimea submulțimilor unei mulțimi are un cardinal mai mare decât cardinalul acelei mulțimi. Prin urmare, există cel puțin o mulțime infinită nenumărabilă, anume mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi infinită numărabilă. Atunci, un *model standard* pentru TM este unul al cărui domeniu este infinit nenumărabil.

Aici intervine teorema descendentă Löwenheim-Skolem:

(14.7) Teoria mulțimilor admite un model infinit numărabil.

Demonstrația e o aplicație imediată a teoremei (14.2). Într-adevăr, cum TM are un model infinit, va avea, potrivit acestei teoreme și unul infinit numărabil.

Între interpretarea (modelul) standard și teorema (14.7) există o tensiune, care constituie ceea ce se numește „paradoxul lui Skolem”.

Cel de-al doilea context logic în care teoremele Löwenheim-Skolem intervin în mod semnificativ vizează relația acestora cu teorema de incompletitudine a lui Gödel. Într-adevăr, teorema (14.6) poate fi demonstrată și plecând de la teorema de incompletitudine a lui Gödel, în felul următor: Gödel a arătat că aritmetica formală este incompletă. Atunci însă AP are două modele care nu sunt elementar echivalente (în unul e adevărată o propoziție, în altul e adevărată contradictoria acesteia; o atare propoziție există în mod necesar potrivit incompletitudinii lui AP). Apelând la teorema (13.2), înseamnă că cele două modele nu sunt izomorfe. Iar dacă unul este modelul standard al aritmeticii, atunci cu siguranță celălalt e nestandard, prin urmare (14.6) e adevărată.

§ 15. Teoremele de interpolare și definibilitate

În paragraful 6 am demonstrat, relativ la logica propozițională, *teorema de interpolare a lui Craig*. Așa cum am văzut, aceasta poate fi formulată atât în chip sintactic (apelând la noțiunea de deductibilitate), cât și semantic (apelând la noțiunea de consecință). Teorema de interpolare e valabilă și pentru logica predicatelor de ordinul întâi. În variantă semantică, ea este următoarea propoziție:

(15.1) Fie σ și τ două propoziții astfel încât $\sigma = \tau$. Atunci există o propoziție θ astfel încât

a) orice simbol predicativ și funcțional și orice constantă individuală care apar în θ apar atât în σ cât și în τ ;

b) $\sigma \models \theta$ și $\theta \models \tau$.

Pentru logica propozițională am dat demonstrația teoremei lui Craig în varianta semantică (teorema (6.2.1)). În acest paragraf nu vom insista însă asupra demonstrației lui (15.1). Dar vom demonstra două teoreme care decurg din teorema de interpolare: teorema de consistență a lui Robinson și teorema de definibilitate a lui Beth.

(15.2) *Teorema de consistență a lui Robinson.* Fie T_1 și T_2 două teorii închise. Atunci: teoria $T_1 \cup T_2$ este realizabilă dacă nu există nici o propoziție în T_1 a cărei negație este în T_2 .

Demonstrație:

1. Suficiența. Aceasta se demonstrează imediat. Să presupunem, într-adevăr, că $T_1 \cup T_2$ este realizabilă, dar există o propoziție σ astfel încât $\sigma \in T_1$ și $-\sigma \in T_2$. Atunci, evident, $T_1 \cup T_2$ este inconsistentă (a se vedea definiția unei teorii inconsistente). Potrivit teoremei de completitudine (13.5), $T_1 \cup T_2$ nu are nici un model, ceea ce contrazice ipoteza.

2. Necesitatea. Trebuie arătat că dacă nu există nici o propoziție σ astfel încât $\sigma \in T_1$ și $-\sigma \in T_2$, atunci $T_1 \cup T_2$ este realizabilă. Aceasta echivalează cu a arăta că dacă $T_1 \cup T_2$ nu este realizabilă, atunci există o propoziție σ astfel încât $\sigma \in T_1$ și $-\sigma \in T_2$. Să presupunem că $T_1 \cup T_2$ nu este realizabilă. Prin teorema de completitudine, $T_1 \cup T_2$ nu e consistentă. Există atunci o mulțime finită Σ de propoziții din $T_1 \cup T_2$ care e inconsistentă. Fie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ și $\Sigma_1 \subseteq T_1$ iar $\Sigma_2 \subseteq T_2$. Cum Σ_1 și Σ_2 sunt finite, există conjuncția propozițiilor din Σ_1 , respectiv din Σ_2 . Să notăm cu σ_1 și σ_2 aceste propoziții. Atunci propoziția

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

este inconsistentă, ceea ce înseamnă că

$$\vdash -(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$$

adică

$$\vdash \sigma_1 \rightarrow -\sigma_2$$

Aplicând teorema de completitudine a lui Gödel, obținem

$$\models \sigma_1 \rightarrow -\sigma_2$$

și de aici

$$\sigma_1 \models -\sigma_2$$

Prin teorema lui Craig, există o propoziție θ ale cărei simboluri nelogice apar atât în σ_1 cât și în σ_2 , și

$$\sigma_1 \models \theta, \theta \models -\sigma_2$$

Cum σ_1 e conjuncția unor propoziții din T_1 , iar T_1 este o teorie închisă, înseamnă că $\sigma_1 \in T_1$. În θ nu apar decât simboluri care aparțin și limbajului în care e formulată T_1 , iar θ e consecința unei propoziții din T_1 . Deci θ e consecință a lui T_1 și, fiindcă T_1 e închisă, deducem că $\theta \in T_1$. Analog, ținând cont de faptul că $\theta \models -\sigma_2$ și că, de asemenea, $\theta \models -\sigma_2$ ddacă $\sigma_2 \models -\theta$, deducem că $-\theta \in T_2$ ceea ce contrazice ipoteza inițială, q.e.d.

Sensul teoremei lui Robinson e următorul. Despre două teorii T_1 și T_2 avem două modalități de a spune că *se contrazic*:

a) sintactic, spunem că T_1 și T_2 se contrazic când există o propoziție σ care apare în T_1 , dar a cărei negație apare în T_2 ; în acest caz, să spunem că cele două teorii sunt *explicit incompatibile*;

b) semantic, spunem că T_1 și T_2 se contrazic atunci când ele nu au nici un model în comun. Să spunem în acest caz că cele două teorii sunt *în conflict*.

A fi în conflict e o noțiune semantică; a fi explicit incompatibile e o noțiune sintactică. Teorema lui Robinson afirmă că două teorii stau în primul raport ddacă stau și în al doilea. Teorema leagă deci cele două noțiuni, asertând că ele au aceeași extensiune; sunt coextensionale.

E interesant să notăm următorul lucru: în demonstrația teoremei lui Robinson s-a folosit teorema de interpolare a lui Craig. Dar se poate proceda și invers: presupunând că teorema lui Robinson e demonstrată, putem demonstra pe această bază teorema lui Craig, după cum urmează.

Fie σ și τ două propoziții astfel încât $\sigma \models \tau$. Fie L_1 limbajul care conține toate simbolurile nelogice din σ și L_2 limbajul care conține toate simbolurile nelogice din τ (și, deci, din $-\tau$). Fie T_1 mulțimea consecințelor în L_1 ale lui σ și T_2 mulțimea consecințelor în L_2 ale lui $-\tau$. Este evident că $T_1 \cup T_2$ este inconsistentă, fiindcă $-\tau$ aparține lui T_2 și deci și lui $T_1 \cup T_2$. Pe de altă parte, cum $\sigma \models \tau$, înseamnă că $\models \sigma \rightarrow \tau$. Dar $\sigma \in T_1$ și deci $\tau \in T_1$, așadar $\tau \in T_1 \cup T_2$, ceea ce face ca $T_1 \cup T_2$ să fie inconsistentă. Potrivit teoremei de completitudine (13.5), $T_1 \cup T_2$ nu este realizabilă. Aplicând acum teorema lui Robinson, înseamnă că există o propoziție θ astfel încât $\theta \in T_1$ și $-\theta \in T_2$. Această propoziție θ trebuie, desigur, să nu conțină decât simboluri nelogice care apar atât în T_1 cât și în T_2 .

Să observăm, mai întâi, că $\theta \in T_1$. Dar T_1 e mulțimea consecințelor lui σ , deci $\sigma \models \theta$. În al doilea rând, $-\theta \in T_2$. Dar T_2 e mulțimea consecințelor lui $-\tau$, deci $-\tau \models -\theta$. De aici obținem

$$\models -\tau \rightarrow -\theta$$

$$\models \theta \rightarrow \tau$$

$$\theta \models \tau$$

ceea ce demonstrează teorema lui Craig.

Să trecem acum la teorema lui Beth. Ca și cea a lui Robinson, ea leagă o noțiune sintactică de una semantică. În cazul teoremei lui Robinson, cele două noțiuni erau reconstrucții ale noțiunii intuitive de contrazicere între două teorii. În cazul teoremei lui Beth, noțiunea intuitivă de la care se pleacă e cea de *definibilitate*, prin care se vizează posibilitatea de a defini ceva în funcție de altceva: e ideea că *într-o teorie un simbol α e definibil cu ajutorul altor simboluri $\beta_1, \dots, \beta_n$* . Bunăoară, ne întrebăm:

- Este definibil în T termenul t cu ajutorul termenilor $t_1, \dots, t_n$?
- Este definibil în T predicatul P cu ajutorul predicatelor $P_1, \dots, P_m$?
- Este definibilă în T funcția F cu ajutorul funcțiilor $F_1, \dots, F_q$?

Se pot formula două reconstrucții logice ale acestei noțiuni intuitive de definibilitate în T : noțiunea de *definiție explicită* și cea de *definiție implicită*. Pentru a ușura înțelegerea teoremei lui Beth, în continuare vom considera numai cazul (b) în care ceea ce se urmărește este să se definească, într-o teorie T , un predicat P cu ajutorul altor predicate $P_1, \dots, P_m$.

Definiția, așa cum se observă, este în ambele cazuri relativizată la o teorie; nici explicit, nici implicit P nu e definit în chip absolut, ci numai relativ la o anumită teorie. De bună seamă însă că cel care dorește să aibă o definiție (explicită sau implicită) absolută va putea proceda în felul următor: va lua teoria T pe care o considerăm ca fiind mulțimea vidă, deci $T = \emptyset$. În acest caz, nu vom mai considera contexte de forma

$$T \vdash \psi$$

ci contexte de forma

$$\vdash \psi$$

deci în care ψ nu mai e deductibilă din T , ci este *tautologie*.

a) Prima reconstrucție logică a noțiunii de definibilitate a unui predicat P în teoria T este sintactică. O vom numi *definibilitate explicită*. Vom spune că predicatul P *n-ar* este explicit definibil în T cu ajutorul predicatelor $P_1, \dots, P_m$ dacă există o formulă ϕ astfel încât

- $T \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n))$;
- toate variabilele libere din ϕ se află printre $v_1, \dots, v_n$;
- toate simbolurile nelogice din ϕ se află printre $P_1, \dots, P_m$.

În acest caz, zicem că ϕ definește explicit predicatul P în T sau că P are o definiție explicită în T prin ϕ .

b) A doua reconstrucție logică a noțiunii de definibilitate a unui predicat P în teoria T este semantică. O vom numi *definibilitate implicită*. Ideea acestui tip de definiție îi aparține logicianului italian A. Padoa. Să presupunem că avem un model M al lui T , în care am determinat deja domeniul de obiecte, precum și extensiunile predicatelor $P_1, \dots, P_m$. Din definibilitatea implicită a lui P prin

$P_1, \dots, P_m$. decurge că, în acest caz, în modelul M al lui T și extensiunea lui P va fi unic determinată.

Cu alte cuvinte, P este definibil implicit în T cu ajutorul predicatelor $P_1, \dots, P_m$ dacă oricare ar fi modelele M_1 și M_2 ale lui T astfel încât

(i) domeniile celor două modele sunt identice, $A_1 = A_2$;

(ii) predicatele $P_1, \dots, P_m$ au aceeași interpretare în ambele modele. Așadar, dacă

$$I_{M_1}(P_1) = R_1 = I_{M_2}(P_1), \dots, I_{M_1}(P_m) = R_m = I_{M_2}(P_m)$$

atunci predicatorul P va avea aceeași interpretare în ambele modele, în simboluri

$$I_{M_1}(P) = R = I_{M_2}(P)$$

În acest caz, zicem că $P_1, \dots, P_m$ definesc implicit în T predicatorul P , sau că P are o definiție implicită în T prin $P_1, \dots, P_m$.

Teorema lui Beth leagă cele două noțiuni; ea afirmă că într-o teorie T ele se aplică exact acelorași predicate.

(15.3) *Teorema de definibilitate a lui Beth.* Un predicator P este explicit definibil în T dacă P este implicit definibil în T .

Demonstrația acestei teoreme va fi formulată într-un mod indirect. Mai întâi, vom demonstra o leamnă care va stabili anumite condiții necesare și suficiente pentru definibilitatea implicită a lui P în T . Apoi vom arăta că acele condiții sunt echivalente cu definibilitatea explicită a lui P în T . Motivul pentru care procedăm astfel este acela că, uneori, în formularea teoremei lui Beth se pomește direct de la condițiile date în această leamnă pentru definibilitatea implicită.

Fie T' o nouă teorie care se obține din T dacă substituim uniform în orice propoziție σ a lui T toate simbolurile nelogice care apar în σ , cu excepția predicatelor $P_1, \dots, P_m$, cu alte simboluri de același tip, adică:

a) ori de câte ori în σ apare o constantă c , substituim uniform pe c cu o nouă constantă c' care nu aparține limbajului lui T ;

b) ori de câte ori în σ apare un predicator n -ar P , îl substituim uniform cu un nou predicator n -ar P' , care nu aparține limbajului lui T ;

c) ori de câte ori în σ apare o funcție n -ară F , o substituim uniform cu o nouă funcție n -ară F' , care nu apare în limbajul lui T .

Așadar, dacă L este limbajul teoriei T , atunci teoria T' este formulată în limbajul

$$L' = \{P_1, \dots, P_m\} \cup \{\alpha' : \alpha \text{ este un simbol al lui } L \text{ diferit de } P_1, \dots, P_m\}$$

Urmează acum leamnă menționată:

(15.4) Un predicator P n -ar este implicit definibil în T cu ajutorul predicatelor $P_1, \dots, P_m$ dacă

$$(I) \quad T \cup T' \models (\forall v_1) \dots (\forall v_n) (P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$$

Demonstrație:

1. Necesitatea. Trebuie să arătăm că dacă (I) e adevărată și M_1 și M_2 sunt modele ale lui T cu același domeniu în care $P_1, \dots, P_m$ au aceleași interpretări,

atunci P are în ambele modele aceeași interpretare. Să presupunem deci că (I) e adevărată și că M_1 și M_2 sunt două modele ale lui T care au același domeniu și în care $P_1, \dots, P_m$ au aceleași interpretări. M_1 și M_2 sunt modele ale lui L . Să construim acum un model, pe care îl vom nota cu $M_1 + M_2$, care e un model al limbajului $L \cup L'$, în felul următor:

a) pentru orice P_i ($i \leq m$), interpretarea acestuia în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui P_i în modelul M_1 (sau, ceea ce e același lucru, în M_2);

b) dacă α este un simbol al lui L , diferit de $P_1, \dots, P_m$, atunci interpretarea lui α în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui α în M_1 ;

c) dacă α este un simbol β' al lui L' , diferit de $P_1, \dots, P_m$, atunci interpretarea lui α în $M_1 + M_2$ este interpretarea simbolului β al lui L în M_2 ;

d) domeniul lui $M_1 + M_2$ este domeniul lui M_1 .

Se vede ușor că orice propoziție σ a lui T este adevărată în modelul $M_1 + M_2$. Apoi, dacă σ' este o propoziție a lui T' , atunci și aceasta este adevărată în $M_1 + M_2$. Într-adevăr, ea este adevărată în $M_1 + M_2$ dacă orice șir de obiecte $x_1, \dots, x_n$ din domeniul lui $M_1 + M_2$ satisface pe σ' , adică relațiile corespunzătoare simbolurilor (nelogice) ale lui L' sunt satisfăcute de obiectele din șirul $x_1, \dots, x_n$. Dar acestea sunt satisfăcute dacă relațiile corespunzătoare simbolurilor lui L ce apar în propoziția σ a lui T sunt satisfăcute de obiectele $x_1, \dots, x_n$ în M_2 . Or, cum M_2 e model al lui T și are tot domeniul A al lui M_1 , acest lucru se întâmplă. Deci $M_1 + M_2$ este model pentru orice propoziție din T' și, astfel, e un model pentru T' . Conchidem de aici că $M_1 + M_2$ e model pentru $T \cup T'$.

Cum (I) e adevărată, înseamnă că

$$M_1 + M_2 \models (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$$

Așadar, interpretarea lui P în $M_1 + M_2$ este identică cu interpretarea lui P' în $M_1 + M_2$. Dar interpretarea lui P în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui P în M_1 , iar interpretarea lui P' în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui P în M_2 . Așadar, P are aceeași interpretare în ambele modele M_1 și M_2 , q.e.d.

2. Suficiența. Presupunem că P este implicit definibil în T cu ajutorul predicatelor $P_1, \dots, P_m$ și fie M un model oarecare al teoriei $T \cup T'$. Să arătăm că M este model și pentru propoziția $(\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$. Modelul M este un model de forma $M_1 + M_2$, iar modelele M_1 și M_2 : a) au același domeniu; b) în ambele, predicatele $P_1, \dots, P_m$ au aceeași interpretare. Întrucât $P_1, \dots, P_m$ definesc implicit în T predicatul P , înseamnă că în ambele modele P are aceeași interpretare. Dar interpretarea lui P' în modelul $M_1 + M_2 = M$ este interpretarea lui P în M_2 care e aceeași cu interpretarea lui P în M_1 și care e deci aceeași cu interpretarea lui P în $M_1 + M_2 = M$. Așadar, propoziția

$$(\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$$

e adevărată în M .

Să notăm următoarea consecință a construcției modelelor de tipul lui $M_1 + M_2$. Fie σ o propoziție a lui T . Există atunci o propoziție σ' a lui T' . Am văzut că σ e adevărată în $M_1 + M_2$ ddacă σ' e adevărată în modelul $M_1 + M_2$. Cum $M_1 + M_2$ este un model oarecare al limbajului teoriei $T \cup T'$, înseamnă că, de fapt, ceea ce s-a demonstrat este că

(15.5) Pentru orice model M al limbajului $L \cup L'$, M este un model pentru σ ddacă M este un model pentru σ' , în simboluri

$$\sigma \models \sigma'$$

Cu aceasta, putem trece la demonstrarea teoremei lui Beth. Ea revine la a arăta că

$$(15.6) \quad T \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n)) \text{ ddacă}$$

$$T \cup T' \models (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$$

1. *Definibilitatea explicită implică definibilitatea implicită.* Aceasta e acum condiția de suficiență din (15.6). Să presupunem că P este explicit definibil în T , deci că

$$T \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n))$$

Conform definiției lui T' și ținând seamă că simbolurile nelogice, care apar în ϕ sunt printre $P_1, \dots, P_m$, avem:

$$T' \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P'(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n))$$

de unde se obține

$$T \cup T' \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n))$$

$$T \cup T' \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P'(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n))$$

De aici decurge imediat că

$$T \cup T' \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$$

și prin teorema de complitudine (13.5) avem

$$T \cup T' \models (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$$

2. *Definibilitatea implicită implică definibilitatea explicită.* Aceasta este condiția de necesitate din (15.6). Să presupunem deci că

$$T \cup T' \models (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \dots, v_n))$$

Să ne reamintim că $T \cup T'$ e formulată în limbajul $L \cup L'$. Să construim acum un alt limbaj $L'' = L \cup L' \cup \{c_1, \dots, c_n\}$, unde c_n sunt noi constante individuale. Din supoziția făcută decurge imediat că

$$T \cup T' \models P(c_1, \dots, c_n) \leftrightarrow P'(c_1, \dots, c_n)$$

Prin teorema de compactitate, înseamnă că există o submulțime finită Σ a lui $T \cup T'$ astfel încât

$$\Sigma \models P(c_1, \dots, c_n) \leftrightarrow P'(c_1, \dots, c_n)$$

Propozițiile din Σ aparțin fie lui T , fie lui T' . Deci $\Sigma = \Delta \cup \Delta'$, unde $\Delta \subseteq T$ și $\Delta' \subseteq T'$. Să notăm cu σ conjuncția propozițiilor din Δ și cu σ' conjuncția

propozițiilor din Δ' . Avem deci

$$\sigma \wedge \sigma' \models P(c_1, \dots, c_n) \leftrightarrow P'(c_1, \dots, c_n)$$

De aici obținem prin logica propozițiilor

$$(1) \sigma \wedge P(c_1, \dots, c_n) \models \sigma' \rightarrow P'(c_1, \dots, c_n)$$

Trebuie să observăm că $\sigma \wedge P(c_1, \dots, c_n)$ și $\sigma' \rightarrow P'(c_1, \dots, c_n)$ sunt propoziții ale lui L' care nu au în comun ca simboluri nelogice decât constantele $c_1, \dots, c_n$ și predicate aflate printre $P_1, \dots, P_m$. Aplicând teorema lui Craig, înseamnă că există o formulă $\theta(c_1, \dots, c_n)$ în care toate simbolurile nelogice sunt printre cele comune lui $\sigma \wedge P(c_1, \dots, c_n)$ și $\sigma' \rightarrow P'(c_1, \dots, c_n)$ și, de asemenea,

$$(2) \sigma \wedge P(c_1, \dots, c_n) \models \theta(c_1, \dots, c_n)$$

$$(3) \theta(c_1, \dots, c_n) \models \sigma' \rightarrow P'(c_1, \dots, c_n)$$

Ținând seamă de propoziția (15.5), aplicată propoziției $\sigma \rightarrow P(c_1, \dots, c_n)$ cu ajutorul lui (3) obținem pe:

$$(4) \theta(c_1, \dots, c_n) \models \sigma \rightarrow P(c_1, \dots, c_n)$$

Cu ajutorul teoremei de completitudine, aplicată propozițiilor (2) și (4), vom avea

$$(5) \sigma \wedge P(c_1, \dots, c_n) \vdash \theta(c_1, \dots, c_n)$$

$$(6) \theta(c_1, \dots, c_n) \vdash \sigma \rightarrow P(c_1, \dots, c_n)$$

teorema deducției permite să se deducă din aceste două propoziții

$$(7) \vdash (\sigma \wedge P(c_1, \dots, c_n)) \rightarrow \theta(c_1, \dots, c_n)$$

$$(8) \vdash \theta(c_1, \dots, c_n) \rightarrow (\sigma \rightarrow P(c_1, \dots, c_n))$$

Să observăm că următoarea expresie este tautologie a logicii de ordinul întâi a predicatelor:

$$(9) \vdash (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)))$$

Va fi așadar tautologie și

$$(10) \vdash (((\sigma \wedge P(c_1, \dots, c_n)) \rightarrow \theta(c_1, \dots, c_n)) \rightarrow ((\theta(c_1, \dots, c_n) \rightarrow (\sigma \rightarrow P(c_1, \dots, c_n))) \rightarrow (\sigma \rightarrow (P(c_1, \dots, c_n) \leftrightarrow \theta(c_1, \dots, c_n)))))$$

Aplicând de două ori regula modus ponens (se folosesc propozițiile (7), (8) și (10)), decurge că

$$(11) \vdash \sigma \rightarrow (P(c_1, \dots, c_n) \leftrightarrow \theta(c_1, \dots, c_n))$$

Iarăși prin teorema deducției, avem

$$(12) \sigma \vdash P(c_1, \dots, c_n) \leftrightarrow \theta(c_1, \dots, c_n)$$

În propoziția σ apar numai simboluri din L , deci în nici un caz nu apar constantele $c_1, \dots, c_n$. Așadar din (12) putem conchide

$$(13) \theta \vdash (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \theta(v_1, \dots, v_n))$$

Prin teorema de completitudine se obține

$$(14) \sigma \models (\forall v_1) \dots (\forall v_n)(P(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \theta(v_1, \dots, v_n))$$

Dar $\sigma \in T$ și deci dacă M e model al lui T , atunci M este model și al lui σ . Prin urmare, (14) conduce la

$$(15) T \models (\forall v_1) \dots (\forall v_n) (P(v_1, \dots v_n) \leftrightarrow \theta(v_1, \dots v_n))$$

ceea ce, luând pe φ ca θ , probează teorema lui Beth, q.e.d.

§ 16. Caracterizarea logicii de ordinul întâi a predicatelor

Cercetarea logicii de ordinul întâi, întreprinsă în paragrafele anterioare, a condus la evidențierea unor proprietăți remarcabile ale acesteia, precum teoremele de completitudine și compactitate, teorema lui Craig sau a lui Beth. Este acum momentul să încercăm să formulăm o caracterizare mai precisă a acestui instrument.

La o primă vedere, logica de ordinul întâi se poate caracteriza ca o teorie având ca obiect de studiu *constantele* sau *concepțiile logice*: și, nu, sau, dacă... atunci, există un, oricare etc. Într-o atare perspectivă, logica de ordinul întâi va fi caracterizată printr-un ansamblu de propoziții care formulează proprietățile conceptelor logice. Dacă, de pildă, primim lucrurile într-o perspectivă semantică, ea va fi caracterizată prin colecția tuturor propozițiilor valide.

Această teorie are o putere expresivă foarte mare. Cel puțin trei contexte sunt extrem de relevante în acest sens:

1) În contextul programului lui Hilbert în fundamentele matematicii, ea a dobândit o semnificație aparte. Una dintre supozițiile acestui program – ceea ce s-a numit *teza lui Hilbert* – era următoarea: toate propozițiile matematicii pot fi exprimate în logica de ordinul întâi, iar noțiunea informală de demonstrație, folosită în matematică, poate fi redată prin noțiunea formală de demonstrație în logica de ordinul întâi.

Cea de a doua parte a tezei lui Hilbert este sprijinită de teorema de completitudine a lui Gödel: ea arată că noțiunea de demonstrație, descrisă în logica întâi – în simboluri, relația $\Sigma \vdash \varphi$ – este coextensivă cu noțiunea de consecință logică: φ e o consecință a lui Σ , în simboluri $\Sigma \models \varphi$. Relația semantică de consecință capturează – prin invocarea modelelor (= a structurilor) studiate de matematicieni – noțiunea informală de demonstrație. Prima parte a tezei lui Hilbert are un caracter empiric: acceptabilitatea ei decurge din dovada că teorii foarte importante ale matematicii pot fi formalizate în cadrele logicii de ordinul întâi. Aici intervine cel de-al doilea context:

2) În logica de ordinul întâi s-a reușit formalizarea unor teorii matematice remarcabile, precum teoria mulțimilor a lui Zermelo-Fraenkel sau aritmetica lui Peano.

3) Un alt context favorabil logicii de ordinul întâi este acela că în prima parte a secolului nostru în filosofia științei a dominat o perspectivă nominalistă. „Majoritatea raționamentelor logice – scria Quine – se desfășoară la un nivel care nu presupune entități abstracte. În atari raționamente se pune la lucru de cele mai multe ori teoria cuantificării, ale cărei legi pot fi formulate prin scheme care nu solicită cuantificarea asupra variabilelor pentru clase. O mare parte din ceea ce se formulează de obicei în termeni de clase, relații sau chiar numere se poate reformula ușor ca scheme în teoria cuantificării plus, probabil, teoria identității”¹.

Argumentul lui Quine poate fi redat prin două teze:

a) În logica de ordinul întâi („teoria cuantificării”, cum îi spune el), cuantificatorii leagă numai variabile individuale, care iau deci ca valori obiecte individuale; nu există cuantificatori care leagă variabile ale căror valori sunt colecții de obiecte („clase”), colecții de perechi ordonate de obiecte, în general de n -tuple de obiecte („relații”) sau numere (care la rândul lor sunt clase).

b) Aceste mijloace ale logicii de ordinul întâi sunt capabile să formalizeze o mare parte a matematicii (cf. și cel de-al doilea context menționat mai sus).

Pentru Quine, relativ la acceptarea unui limbaj, noi suntem angajați ontologic față de anumite genuri de entități: potrivit celebrului său criteriu de angajare ontologică, a fi înseamnă a fi valoare a unei variabile ce poate fi legată. Dacă se cuantifică asupra unor variabile care iau ca valori obiecte, înseamnă că acceptăm (relativ la limbajul respectiv) obiecte în ontologia noastră; dacă se cuantifică asupra unor variabile care iau ca valori numere (sau clase), înseamnă că acceptăm numere (respectiv clase) în ontologie. Logica de ordinul întâi e „nominalistă” în acest sens; ea ne angajează ontologic numai față de obiecte individuale, nu și față de alte entități (față de entități abstracte, în special, cum ar fi clasele, relațiile sau numerele).

Aceste argumente în favoarea logicii de ordinul întâi au alimentat teza că *logica este logica de ordinul întâi*; orice cade în afara acestei logici nu este de natură logică. O atare teză implică mai multe propoziții. Printre ele se află și următoarele:

A. Există o distincție clară între conceptele logice (și, nu, sau, oricare etc.) și conceptele nelogice. Concepte precum cele de infinit, de clasă, de număr sunt concepte din afara logicii. Desigur, e clar că unele dintre acestea nu sunt concepte logice (cel de număr, în particular de număr real, de pildă). problema este însă, pe de o parte, că nu e limpede dacă distincția dintre cele două tipuri de concepte a atât de fermă. Pe de altă parte, această teză nu se întemeiază pe

¹ W. Quine, *From a Logical Point of View*, p. 116.

o concepție clară cu privire la natura conceptelor logice: ce le face să fie logice și să difere de cele ne-logice?

B. Se presupune că toate conceptele ne-logice se supun aceleiași logici. Logica este insensibilă la materia căreia i se aplică. Oricărui sistem i s-ar aplica, logica va consta în aceleași principii de raționament. Când întrebăm: „Care e logica acestui concept matematic particular?“, întrebarea nu vizează decât descrierea felului în care logica i se aplică acestuia, nicidecum faptul că logica lui ar fi diferită de logica altui concept matematic. Când spunem: „Îmi scapă logica acestui concept“, ceea ce vrem să afirmăm e că nu e clar cum o anumită concluzie decurge din anumite premise (care încorporează principii privitoare la acel concept), nu că acest concept ar avea o logică a lui.

O atare perspectivă asupra logicii de ordinul întâi poate fi supusă însă unor obiecții. Obiecțiile vizează atât contextele (1) – (3), cât și presupuzițiile (A) și (B).

În răspărul tezei lui Hilbert, s-a argumentat că noțiuni foarte importante din matematică nu pot fi formalizate în logica de ordinul întâi; în această situație se află noțiuni din teoria mulțimilor (*mulțime infinită; mulțime numărabilă*), din analiză (*mulțime de măsură zero*), din topologie (*mulțime deschisă; funcție continuă*), din teoria probabilității (*variabilă aleatoare*) etc., care sunt centrale în matematică. Să luăm un exemplu foarte simplu, pentru a vedea cum noțiuni chiar mai puțin complexe nu pot fi prinse de logica de ordinul întâi.

Teoria grupurilor G se formulează într-un limbaj $L = \{0, +\}$, unde 0 este o constantă individuală, iar $+$ este o constantă funcțională binară.

Teoria grupurilor are următoarele axiome:

- G1. $(\forall v_1) (\forall v_2) (\forall v_3) ((v_1 + (v_2 + v_3)) = ((v_1 + v_2) + v_3))$ (asociativitatea)
- G2. $(\forall v) ((v + 0) = v; (\forall v) ((0 + v) = v))$ (element neutru)
- G3. $(\forall v_1) (\exists v_2) ((v_1 + v_2 = 0; (v_2 + v_1) = 0)$ (existența inversului)

Un model pentru această teorie este de forma $\langle G, 0, + \rangle$, unde G e o mulțime de obiecte, 0 e un obiect din G , iar $+$ e o funcție binară pe G . Un astfel de model este numit grup. Să luăm două exemple:

a) G este mulțimea numerelor naturale: 0 este numărul 0 , iar $+$ este adunarea obișnuită între numerele naturale.

b) G și 0 sunt ca mai sus, dar $+$ se definește astfel: dacă x și y sunt două numere, atunci $x + y$ este restul împărțirii la 5 a adunării lui x cu y . De pildă, vom avea în acest caz: $7 + 5 = 2$, iar $6 + 4 = 0$.

Teoria grupurilor abeliene (sau comutative) GA se obține adăugând lui G axioma

$$G4. (\forall v_1) (\forall v_2) ((v_1 + v_2) = (v_2 + v_1))$$

Ambele grupuri luate ca exemplu mai sus sunt abeliene, așa cum se poate vedea cu ușurință.

Să notăm acum cu nx ($n \geq 1$) expresia $x + (x + \dots (x + x) \dots)$, de n ori. De pildă $1x$ este x ; $2x$ este $x + x$; $3x$ este $x + (x + x)$ etc. Fie $x = 4$. Atunci în primul exemplu de grup avem $1x = 4$; $2x = 4 + 4 = 8$; $3x = 4 + (4 + 4) = 4 + 8 = 12$ etc.

Teoria grupurilor abeliene periodice GAP rezultă adăugând lui GA axioma G5. $(\forall v) (\exists n) (nv = 0)$

Cel de-al doilea grup luat ca exemplu este periodic. Într-adevăr, să observăm că dacă interpretarea lui v e un număr oarecare x , atunci

$$x + (x + (x + (x + x))) = 0$$

deci pentru $n = 5$ axioma G5 devine adevărată.

Primul grup luat ca exemplu nu e însă periodic.

Problema este însă alta: axioma (G5) nu este o formulă a logicii de ordinul întâi; din acest motiv, GAP nu este o teorie ce poate fi formulată în logica de ordinul întâi. Că este așa se vede imediat în felul următor: în limbajul L al teoriei GAP nu există simboluri corespunzătoare noțiunilor aritmetice (0 și $+$ nu sunt simboluri aritmetice, deși în unele modele pot fi interpretate – precum în cele două exemple ale noastre – aritmetic!). În al doilea rând, în formalizarea lui L , nu s-au introdus variabile care iau ca valori numere. Ținând seamă că nx e numai o prescurtare, formula (G5) este, de fapt o prescurtare pentru:

$$(16.1) (\forall v) (v = 0 \vee (v + v = 0 \vee (v + (v + v)) = 0 \vee \dots (v + (v + \dots (v + v) \dots) \vee \dots))$$

Dar (16.1) nu e o formulă a logicii de ordinul întâi, fiindcă este un șir *infin*it de simboluri ale lui L , ceea ce nu e permis.

Iată deci cum o teorie algebrică extrem de simplă nu poate fi formalizată în logica predicatelor de ordinul întâi. La cele spuse aici s-ar putea însă obiecta în felul următor: să presupunem că limbajul în care e formalizată GAP e mai larg și cuprinde o formalizare a aritmeticii. Atunci putem cuantifica asupra variabilelor care iau ca valori numere și, deci, (G5) e formulă a logicii de ordinul întâi. Astfel, teza lui Hilbert e păstrată. Problema cu o sugestie precum aceasta e următoarea: se admite că teoria grupurilor *presupune* teoria numerelor. Or, aceasta nu e în spiritul algebrei moderne. Altfel zis, o atare ipoteză nu e în acord cu practica matematică.

O altă obiecție la adresa tezei lui Hilbert vine din existența modelelor neintenționate pentru teoriile de ordinul întâi. Cum am văzut, teoria numerelor are modele infinit nenumărabile, iar teoria mulțimilor și teoria numerelor reale au modele infinit numărabile. Teorema Löwenheim-Skolem, cea ascendentă și cea descendentă, care produc această situație, arată că noțiunile complementare

de *numărabil* și *nenumărabil* nu pot fi definite în logica de ordinul întâi. Dar această situație nu este în concordanță cu practica matematică; în analiza matematică mulțimea nenumărabilă (continuă) a numerelor reale este luată ca bază.

Teorema de compactitate, la rândul ei, dovedește că noțiunile de finit și de infinit nu pot fi capturate în logica de ordinul întâi. Și iarăși practica matematică este încălcată, căci algebristii iau noțiunea de *finit* ca punct de pornire.

Exemplele date indică și altceva: în contexte diferite deranjează proprietăți diferite ale logicii de ordinul întâi: în exemplu relativ la teoria grupurilor era deplânsă imposibilitatea de a avea expresii infinite de lungi; în cel relativ la numerele reale era deplânsă existența modelelor numărabile ale teoriilor de ordinul întâi etc.

Ar decurge de aici că logicile cărora li se supun diverse concepte sunt diferite: cele din analiză au o logică în care teorema descendentă Löwenheim-Skolem nu este valabilă; cele din algebră impun o logică în care teorema de compactitate să fie încălcată. Așadar, punctul (B) de mai sus se dovedește a fi nerealist. Desigur că din sugestia că logica de ordinul întâi trebuie abandonată nu rezultă *ce* logică să fi pusă în loc, în fiecare context particular. Care e logica care să poată da seamă de conceptele de finit și de infinit? Răspunsul nu este prea ușor de dat, cum vom vedea de altfel și din exemplele de mai jos.

Cea mai simplă metodă de a produce o nouă logică este aceea de a formula o extindere a logicii de ordinul întâi. Logica predicatelor de ordinul întâi apare în această perspectivă ca *logica standard*. Celelalte sisteme logice au, acum, semnificația unor alternative – sau, precum în cazul exemplelor pe care le vom discuta mai jos, pe cea a unor extinderi ale ei.

I. Cuantificatori generalizați. Ideea acestei extinderi este de a introduce noi cuantificatori, alături de cei obișnuiți, $\forall$ și $\exists$, pentru a elimina unele din carențele menționate ale logicii de ordinul întâi. Primul care a mers pe acest drum a fost Mostowski. Plecând de la faptul că noțiuni atât de importante în matematici precum cele de *finit*, *numărabil* nu sunt definibile în logica de ordinul întâi, el a propus să încercăm să captăm aceste noțiuni în mod direct, cu ajutorul unor noi cuantificatori. Sintactic, strategia lui constă în a modifica regulile de formare a formulelor, adăugând regula:

(16.2) Dacă ϕ este o formulă, atunci $(Qv)\phi$ este o formulă.

Înțelesul lui Q depinde de regula semantică adoptată. De pildă, s-ar putea formula regula:

(16.3.1) $M \models (Qv)\phi(v)$ dacă există cel puțin un număr infinit numărabil de obiecte x astfel încât $M \models \phi(v)(x)$.

Așadar, (16.3.1) spune că propoziția $(Qv)\phi(v)$ e adevărată în modelul M dacă ϕ e satisfăcută în M de cel puțin un număr *infinit numărabil* de obiecte;

și nu e adevărată dacă e satisfăcută în M de un număr finit de obiecte. Logica $L(Q0)$ formulată aici reușește să traseze diferența între finit și infinit, ceea ce am văzut că este extrem de important în anumite contexte. Bunăoară, astfel putem spune că există infinit de multe numere naturale. Pentru aceasta, să admitem că dacă φ e o formulă a AP , atunci și $(Qv)\varphi$ e o formulă a AP . Să ne amintim, de asemenea, că în acest limbaj se definește relația $<$:

$$v < v' = df(\exists v'') ((v + Sv'') = v')$$

În logica $L(Q0)$, construită pe baza regulilor (16.2) și (16.3.1), vom avea:

$$AP \vdash (Qv) (0 < v)$$

adică: numerele naturale sunt cel puțin infinit numărabile.

De asemenea, am putea construi o logică $L(Q1)$ care să permită distincția dintre numărabil și nenumărabil, înlocuind pe (16.3.1) cu

(16.3.2) $M \models (Qv)\varphi(v)$ ddacă există cel puțin un număr infinit nenumărabil de obiecte x în A astfel încât

$$M \models \varphi(v) ((x))$$

În noua logică se pot defini modele infinit nenumărabile (de pildă, modelul standard pentru numerele reale) etc.

Logici precum $L(Q0)$ și $L(Q1)$ pun cel puțin două probleme importante:

a) Dacă se acceptă ca *naturale* astfel de extinderi ale logicii de ordinul întâi, înseamnă că, implicit, propoziția (A) de mai sus este abandonată. Potrivit lui (A), există o distincție clară între conceptele logice și conceptele ne-logice. Dar o logică precum $L(Q0)$ se bazează pe o supoziție diferită: conceptul de infinit numărabil este logic, odată ce el este încorporat direct în condiția semantică (16.3.1); la rândul ei, $L(Q1)$ conduce la concluzia că, fiind la rândul lui încorporat direct în (16.3.2), conceptul de infinit nenumărabil este logic. Așadar, mișcarea către extinderi ale logicii de ordinul întâi e, în același timp, o punere sub semnul întrebării a propoziției (A).

b) Ce proprietăți structurale au $L(Q0)$ și $L(Q1)$? De pildă, în logica $L(Q0)$ nu se poate demonstra teorema de compactitate. În $L(Q0)$ cad, de asemenea, teorema de interpolare a lui Craig și cea de definibilitate a lui Beth.

Într-adevăr, să luăm teorema lui Beth. Ea spunea că o noțiune sintactică – definibilitatea explicită – este coexistentă cu o noțiune semantică – definibilitatea implicită. Dar în cazul lui $L(Q0)$, sintaxa este finită, și deci o mulțime infinită nu este definibilă explicit; în schimb, condiția semantică (16.3.1) permite să definim implicit mulțimi infinibile. Ca urmare, teorema lui Beth cade și, odată cu ea, cade și cea a lui Craig a cărei consecință este.

Morala ce poate fi extrasă de aici e următoarea: dacă vrem o logică în care noțiunile de finit și de infinit să poată fi exprimate, și dacă în plus vrem ca această logică să păstreze teorema de definibilitate a lui Beth, atunci trebuie

ca sintaxa însăși să fie, într-un sens, infinită. Cum se poate acest lucru vom vedea cu ajutorul exemplului următor:

Să observăm însă mai întâi că în logica de ordinul întâi, datorită teoremei descendente Löwenheim–Skolem, cuantificatorul: există nenumărabil de mulți... nu este definibil. Însă dacă se construiește logica $L(Q1)$ acesta e definibil implicit. În $L(Q1)$ teorema lui Beth cade, și cade de asemenea teorema descendentă Löwenheim–Skolem.

II. *Logici infinitare.* Logici precum $L(Q0)$ au o putere expresivă redusă: ele nu permit distincții fine, ci doar pe cele care vizează cardinalitatea unei mulțimi. În plus, am văzut că ele nu mai permit demonstrarea unor teoreme extrem de importante. O altă strategie de a extinde logica de ordinul întâi se concentrează asupra sintaxei: se acceptă formule infinite de lungi. Lucrul acesta se poate face în două feluri:

- a) se acceptă conjuncții și disjuncții infinite;
- b) se acceptă un număr infinit de cuantificatori în fața unei formule.

Pentru a evidenția clar cum se procedează, logicile nou construite sunt notate astfel: $L(\kappa, \lambda)$, unde κ arată că în această logică se admit conjuncții și disjuncții de lungime mai mică decât κ , iar λ arată că se admit șiruri de cuantificatori de lungime mai mică decât λ . De pildă, logica obișnuită, de ordinul întâi, este o logică $L(\omega, \omega)$, fiindcă: a) se admit conjuncții și disjuncții mai mici decât ω , deci finite; și b) se admit doar șiruri mai mici decât ω de cuantificatori, deci tot finite.

Logica $L(\omega_1, \omega)$ permite conjuncții și disjuncții infinite numărabil de lungi. În ea (16.1) este formulă. Sau, un alt exemplu: este formulă în limbajul aritmeticii lui Peano (formalizat în această logică!) expresia

$$(16.4) (\forall v) (v = 0 \vee v = 1 \vee v = 2 \vee \dots)$$

care spune că orice obiect este un număr natural.

Este interesant să subliniem aici următorul fapt: în logica $L(\omega_1, \omega_1)$ se poate defini cuantificatorul: există infinit (numărabil) de mulți...; prin urmare, $L(\omega_1, \omega_1)$ include logica $L(Q0)$. Într-adevăr, faptul că infinit (numărabil) de multe obiecte au proprietatea P poate fi exprimat prin formula:

$$(16.5.1) (\exists v) P(v) \cdot (\forall v)(\exists v')(P(v) \cdot P(v') \cdot v \neq v') \cdot \\ (\forall v)(\forall v')(\exists v'') (P(v) \cdot P(v') \cdot P(v'') \cdot v \neq v' \cdot v \neq v'' \cdot v' \neq v'')...$$

Definirea cuantificatorului: *există infinit de mulți* este realizată cu mijloace sintactice. Apelând la modelele canonice, rezultă că acest cuantificator se definește și implicit. Ca urmare, în $L(\omega_1, \omega_1)$ teorema lui Beth este demonstrabilă. Dar cea de compactitate cade.

III. *Logica de ordinul doi*. Probabil că aceasta este cea mai naturală extindere a logicii de ordinul întâi. Construirea ei a urmărit să elimine unele carențe neplăcute ale logicii de ordinul întâi. În aceasta, de pildă, e imposibil să se formuleze o susținere de felul: fie f o funcție oarecare cu proprietatea că este crescătoare (sau continuă, monotonă etc.), deși putem spune: fie x un obiect oarecare care satisface proprietatea P . Apoi, în logica de ordinul întâi nu e posibil să se formuleze propoziții de felul: există o funcție identitate; ori: obiectele x și y au o proprietate în comun; ori: dacă obiectele x și z sunt identice, atunci au aceleași proprietăți. Putem însă identifica o anumită funcție ca funcție identitate: când $(\forall v)(f(v) = v)$; de asemenea, putem să afirmăm, pentru orice formulă φ în parte, că

$$(c = c') \rightarrow (\varphi(c) \leftrightarrow \varphi(c'))$$

Logica de ordinul doi este un mijloc de a exprima astfel de susțineri. În acest scop, e nevoie să putem cuantifica asupra unor variabile care iau ca valori nu obiecte, ci alte feluri de entități: funcții, predicate, propoziții etc. Prin urmare, pentru a produce o logică de ordinul doi, e nevoie:

- să se introducă variabile de funcții, de predicate, de propoziții;
- să se extindă ideea de formulă, pentru a permite cuantificări asupra acestor noi variabile;
- să se definească într-un sens care să cuprindă și noile variabile, noțiuni ca cele de variabilă liberă și legată, de propoziție și formulă de ordinul doi etc.

De pildă, fie x, y , variabile pentru predicate unare. Atunci $x(c)$ este o formulă de ordinul doi, în care apare (liberă) variabila predicativă x ; $(\exists x)x(c)$ este o propoziție de ordinul doi, adică o formulă de ordinul doi în care nici o variabilă de ordinul doi nu apare liberă.

Putem să combinăm cuantificări asupra unor variabile individuale cu cuantificări asupra unor variabile de ordinul doi. Astfel, propoziția de ordinul doi:

$$(\exists x)(\forall v)(x(v) = v)$$

afirmă că există o funcție identitate; propoziția

$$(\forall v)(\forall v')(\exists x)(x(v) \cdot x(v'))$$

spune că oricare două obiecte au cel puțin o proprietate în comun. Interesant este că în această logică putem formula principiile de identitate ale lui Leibniz:

$$(16.6.1) \text{ Principiul identității indiscernibililor: } (\forall v)(\forall v')((\forall X)(X(v) \leftrightarrow X(v')) \rightarrow v = v')$$

(dacă două obiecte au aceleași proprietăți, atunci ele sunt identice) și

$$(16.6.2) \text{ Principiul indiscernibilității identicilor:}$$

$$(\forall v)(\forall v')(v = v' \rightarrow (\forall X)(X(v) \leftrightarrow X(v')))$$

(dacă două obiecte sunt identice, atunci au aceleași proprietăți).

Un alt exemplu este următorul: în logica de ordinul întâi aritmetica lui Peano am văzut că poate fi axiomatizată cu ajutorul a șase axiome (12.12 a–f) și al unei scheme axiomatice (12.12 g) – principiul inducției. Prin urmare, AP are o infinitate de axiome, căci principiul inducției furnizează câte o axiomă pentru fiecare instanță a sa; iar aceste instanțe sunt infinite ca număr. Însă în logica de ordinul doi AP este finit axiomatizabilă, fiindcă schema axiomatice a inducției poate fi înlocuită cu o singură axiomă (care e o propoziție de ordinul doi), anume:

$$(16.7) (\forall X)((X(0) \cdot (\forall v)(X(v) \leftrightarrow X(Sv))) \rightarrow (\forall v) X(v))$$

(aici X este o variabilă predicativă). Teoria de ordinul doi care are ca axiome propozițiile (12.12 a–f) și (16.7) se numește aritmetica (lui Peano) de ordinul doi.

Aceste exemple arată că logica de ordinul doi are o putere mai mare decât cea de ordinul întâi în a exprima diverse susțineri.

Capitolul de față ne-a pus în fața unor teoreme importante asupra logicii de ordinul întâi: teoremele de compactitate, de completitudine, Löwenheim-Skolem, Craig etc. Sunt acestea valabile relativ la logica de ordinul doi? Așa cum vom vedea imediat,

- a) teorema descendentă Löwenheim-Skolem nu e valabilă;
- b) teorema de compactitate nu este valabilă;
- c) teorema de completitudine nu este valabilă.

Aceste rezultate arată că semantica logicii de ordinul doi este mai „sălbatică” decât cea, domesticită, a logicii de ordinul întâi. Ele au constituit, de altfel, unul dintre motivele pentru care această logică a fost mult timp mai puțin cercetată.

Pentru a vedea cum se pot proba rezultatele (a)–(c), e nevoie de anumite considerații semantice. În particular, e nevoie să extindem noțiunea de *satisfacere* a unei formule pentru a acoperi cazul când avem a face cu variabile de ordinul doi. Pentru a simplifica lucrurile, în continuare vom nota cu u, u_1, u_2 variabile funcționale, iar cu $X, Y, X_1, \dots$ variabile predicative. Atunci vom avea:

(16.8.1) Fie u o variabilă funcțională n -ară. Atunci: $M \models (\forall u) \varphi(u)$ dacă pentru orice funcție n -ară f definită pe A^n (unde A este domeniul lui M) și cu valori în A , avem: $M \models \varphi(f)$.

(16.8.2) Fie x o variabilă predicativă n -ară. Atunci: $M \models (\forall x) \varphi(x)$ dacă pentru orice relație n -ară R pe A avem: $M \models \varphi(R)$.

Vom arăta acum că în logica de ordinul doi teorema descendentă Löwenheim-Skolem cade. Această teoremă spune că dacă o formulă φ este adevărată într-un model infinit, atunci e adevărată și într-un model infinit numărabil. Demonstrația va reveni atunci la a arăta că:

(16.9) Există o propoziție ϕ de ordinul doi care are un model infinit nenumărabil, dar ϕ este falsă în orice model infinit numărabil.

Dacă avem o astfel de propoziție ϕ , înseamnă că în orice model infinit numărabil, $\neg \phi$ este adevărată. Prin urmare, e suficient să construim o propoziție de ordinul doi $\psi = \neg \phi$ care e adevărată într-un model dacă acesta este infinit numărabil. Ne vom raporta la limbajul L_{AP} al aritmeticii lui Peano. Vom lua drept ψ propoziția

$$(\exists u)(\forall X)((X(0) \cdot (\forall v')(X(v') \rightarrow X(u(v')))) \rightarrow (\forall v') X(v'))$$

Demonstrația are două părți:

a) Dacă M este un model numărabil al AP , atunci M este model al lui ψ . Acest lucru decurge imediat, dacă observăm că ψ e o consecință a principiului inducției matematice, formalizat în logica de ordinul doi, prin generalizare existențială (deci prin aplicarea axiomei $\psi(f) \rightarrow (\exists u) \phi(u)$).

b) Dacă M este un model al lui ψ , atunci M este infinit numărabil. Să presupunem deci, că $M \models \psi$. Atunci, există un obiect $a \in A$ (domeniul lui M) și o funcție $f: A \rightarrow A$, astfel încât dacă interpretăm pe 0 ca a și pe S ca f , avem

$$(1) M \models (\forall X) ((X(0) \cdot (\forall v) (X(v) \rightarrow X(S v)) \rightarrow (\forall v) X(v)) ((a, f))$$

Fie acum D o submulțime a lui A , definită astfel:

$$D = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}$$

Să luăm un predicat P unar care este interpretat în M ca D , deci $I(P) = D$.

Dar dacă propoziția (1) este adevărată (potrivit lui 16.8.2)), e adevărată și:

$$(2) M \models (P(0) \cdot (\forall v) (P(v) \rightarrow P(Sv)) \rightarrow (\forall v) P(v)) ((a, f, D))$$

Or, $P(0)$ e adevărată în M , fiindcă $I(0) = a$ și $I(P) = D$, iar $a \in D$. De asemenea, în M e adevărată și propoziția $(\forall v)(P(v) \rightarrow P(S(v)))$, fiindcă ea revine la a spune că dacă un obiect $a \in D$, atunci și $f(a) \in D$. Așadar, avem

$$(3) M \models (P(0) \cdot (\forall v) (P(v) \rightarrow P(S v)) ((a, f, D))$$

Din (2) și (3) obținem imediat

$$(4) M \models (\forall v) (P(v)) ((a, f, D))$$

Potrivit definiției noțiunii de satisfacere (definiția (11.3), punctul (c)), înseamnă că în M interpretarea lui P este A . Deci $D = A$. Însă D este o mulțime infinit numărabilă, deci domeniul lui M este tot așa – ceea ce înseamnă că M este numărabil, q.e.d.

Așadar, ψ e o propoziție adevărată numai în modele numărabile ale lui L_{AP} și este, deci, falsă, în toate modelele nenumărabile ale lui L_{AP} . Prin urmare, ϕ este adevărată în aceste modele nenumărabile, însă e falsă în toate modelele numărabile de L_{AP} . Teorema Löwenheim-Skolem nu este valabilă pentru logica de ordinul doi.

În logica de ordinul doi se poate demonstra următorul rezultat foarte puternic:
 (16.10) Dacă M este un model al AP , atunci M este izomorf cu modelul standard MN al AP , în simboluri:

Dacă $M \models AP$, atunci $M \cong MN$.

Teorema spune că aritmetica lui Peano, formalizată în logica de ordinul doi, nu are modele nestandard. Incompletitudinea logicii de ordinul doi și faptul că în ce o privește teorema de compactitate cade sunt consecințe ale lui (16.10). Cu titlu de exemplu, să arătăm că în logica de ordinul doi teorema de compactitate nu este valabilă. Aceasta revine la a arăta că

(16.11) Există o teorie T formulată în logica de ordinul întâi astfel încât:
 a) toate submulțimile ei finite au un model; dar b) T nu are nici un model.

Demonstrație. Să observăm mai întâi că în logica de ordinul doi, întrucât – așa cum am văzut – AP este finit axiomatizabilă, putem construi conjuncția celor șapte axiome ale AP . Prin urmare, aritmetica de ordinul doi a lui Peano are o singură axiomă, pe care să o notăm cu AP . Fie acum T teoria

$$T = \{AP, a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2, \dots\}$$

Orice submulțime finită a lui T are un model. Într-adevăr, în o submulțime finită Δ a lui T , pentru un număr n , propoziția $a \neq n$ nu aparține lui Δ . Atunci luăm ca model al lui Δ pe MN , în care interpretăm pe a ca n , $I(a) = n$. Dar să presupunem că T însăși are un model M . M este un model al limbajului $L = L_{AP} \cup \{a\}$. Fie M' acel model al L_{AP} care are același domeniu cu M și atașează simbolurilor $0, S, +, \cdot$ (= simbolurilor din L_{AP}) aceleași interpretări pe care le atașează acestor simboluri modelul M . Dar, desigur, M' nu atașează nimic simbolului a . Însă în M sunt adevărate toate propozițiile $a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2, \dots$, deci M' nu este izomorf cu MN , modelul standard al AP .

Pe de altă parte, $M \models AP$ și, potrivit construcției lui M' , vom avea și $M' \models AP$. Dar atunci teorema (16.10) garantează că M' este izomorf cu MN . Contradicție. Deci, T nu are nici un model, deși toate submulțimile sale finite au un model, ceea ce indică faptul că teorema de compactitate nu este valabilă în logica de ordinul doi.

*

* *

Exemplele de extinderi ale logicii de ordinul întâi au evidențiat faptul că

a) pe plan sintactic, se pot construi noi formule și noi demonstrații;

b) pe plan semantic, se pot demonstra teoreme noi (de pildă, (16.10)), iar alte teoreme devin false.

În mod obișnuit, definim o *logică* (logica propozițională ori logica predicatelor de ordinul întâi) prin clasa propozițiilor pe care ele le selectează ca demonstrabile sau, ceea ce e același lucru, ținând seama de teorema de completitudine,

prin clasa propozițiilor ei valide. Odată selectată o atare clasă de propoziții, ne întrebăm, în al doilea rând, ce putem spune despre ea: satisface sau nu compactitatea? satisface sau nu teorema lui Craig?

Prin extinderile logicii de ordinul întâi, între care cele trei prezentate mai sus, s-a încercat să se procedeze analog. Se construiau noi clase de propoziții (dacă acea construcție era făcută sintactic, aveam o clasă de propoziții demonstrabile; dacă acea construcție era făcută semantic, aveam o clasă de propoziții valide) și se căutau apoi proprietăți ale acestora (compactitatea, completitudinea, definibilitatea, interpolarea etc.). Clasa propozițiilor demonstrabile (sau valide) *determină* clasa proprietăților metateoretice care sunt valabile pentru acea logică.

Să întrebăm însă acum invers: presupunând că știm că o logică satisface anumite astfel de proprietăți, vom ști ceva sigur și despre propozițiile demonstrabile (sau valide) ale acelei logici? Altfel zis: determină clasa proprietăților metateoretice, clasa propozițiilor demonstrabile (sau a propozițiilor valide ale) unei logici? Dacă strategia de cercetare descrisă mai devreme era impulsionată de intuiție, acum intuiția nu ne spune nimic.

În 1969, Lindström a dovedit că răspunsul la întrebările puse aici este uncori afirmativ. El a arătat că logica de ordinul întâi este caracterizată de două astfel de proprietăți metateoretice. Anume, el a arătat că dacă vrem să extindem logica de ordinul întâi, atunci nu vom putea face aceasta decât cu prețul abandonării a cel puțin uneia din cele două proprietăți. Altfel zis, logica de ordinul întâi este *cea mai puternică* logică relativ la care sunt satisfăcute cele două proprietăți.

(16.12) *Teorema lui Lindström*. Fie L un limbaj al logicii de ordinul întâi, iar L' un limbaj care a) include pe L ; și b) este limbaj al unei extinderi a logicii de ordinul întâi care are următoarele două proprietăți:

1) *Proprietatea descendentă Löwenheim-Skolem* (dacă o propoziție σ a lui L' are un model, atunci are și un model infinit numărabil).

2) *Proprietatea de compactitate* (orice teorie T din L' are un model dacă orice parte finită a ei are un model).

Atunci pentru orice propoziție σ a lui L' există o propoziție τ a lui L astfel încât σ și τ au exact aceleași modele.

Sensul teoremei (16.12) este evident: dacă există o propoziție validă într-o extindere L a logicii de ordinul întâi, dar nu e validă în logica de ordinul întâi, atunci în L fie cade teorema descendentă Löwenheim-Skolem, fie cade teorema de compactitate. Nu se poate, deci, să păstrăm acele teoreme laolaltă și să adăugăm logicii de ordinul întâi noi puteri expresive (altfel zis, să o extindem).

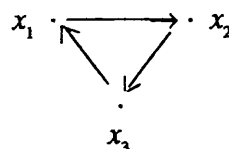
Logica de ordinul întâi este cea mai puternică logică în care sunt satisfăcute condițiile (1) și (2).

§ 17. Exerciții

1. Formalizați într-un limbaj de ordinul întâi următoarele propoziții din limba naturală:

- Toți cei care sunt politicieni sunt și ambițioși.
- Nu e adevărat că toți oamenii ambițioși nu sunt onești.
- Oricine iubește pe cineva.
- Oricine admiră pe cineva care îi admiră pe toți.
- Nimeni nu admiră pe cineva care îi admiră pe toți cei care admiră pe cineva.

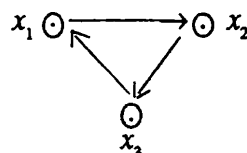
2. Fie $L = \{c_1, c_2, c_3, P\}$ un limbaj cu trei constante și un predicat binar. Fie un model M al lui L definit astfel: $M = \{\{c_1, c_2, c_3\}, R\}$. Modelul M poate fi reprezentat prin figura



Relația R are loc între două obiecte (nu neapărat diferite între ele) atunci când o săgeată leagă cele două obiecte. Să se determine valorile de adevăr la M ale următoarelor propoziții:

- $(\forall v)(\exists v') P(v, v')$
- $(\forall v)(\exists v') P(v', v)$
- $(\exists v)(\forall v') P(v, v')$
- $(\exists v)(\forall v') P(v', v)$

3. Fie un limbaj $L' = \{c_1, c_2, c_3, P, Q\}$, unde c_1, c_2, c_3 sunt constante, P e un predicat binar iar Q un predicat unar. Un model M al lui L' e reprezentat grafic după cum urmează:



Aici Q e interpretat ca acea proprietate pe care o are un obiect dacă în reprezentarea grafică există un cerc în jurul punctului care stă pentru acel obiect, iar P este interpretat ca în exercițiul 2:

a) Descrieți detaliat interpretarea I a limbajului L' în M .

b) Determinați valoarea de adevăr în M a următoarelor propoziții:

- (i) $(\exists v) (\exists v') (\exists v'') (P(v, v') \cdot Q(v') \cdot P(v, v'') \cdot \neg Q(v''))$
- (ii) $(\forall v) P(v, v)$
- (iii) $(\exists v) (P(v, c_2) \cdot Q(v))$
- (iv) $(\forall v) (P(v, v) \leftrightarrow \neg Q(v))$
- (v) $(\forall v) (P(v, v) \rightarrow ((\exists v') (P(v, v') \cdot Q(v'))))$
- (vi) $(\forall v) (Q(v) \rightarrow (\exists v') P(v, v'))$

4. Folosind relația de identitate, formalizați într-un limbaj de ordinul întâi propozițiile:

- a) Ion o iubește pe Mihaela, dar Mihaela iubește pe altcineva.
- b) Ion nu o iubește pe Mihaela, ci pe altcineva.
- c) Pe Ion nu îl iubește decât Mihaela.
- d) Ion iubește toate fetele, cu excepția Mihaelei.
- e) Numai Ion o iubește doar pe Mihaela.
- f) Oricine iubește doar o persoană.
- g) Oricine iubește doar o altă persoană.
- h) Oamenii care iubesc pe toți ceilalți în afară de ei sunt altruști.

5. Găsiți două modele ale limbajului $L = \{P\}$ care să aibă câte trei obiecte, dar în care propoziția

$$(\forall v) (\forall v') (P(v, v') \vee P(v', v) \vee v = v') \cdot (\forall v) (\forall v') (P(v, v') \rightarrow \neg P(v', v))$$

să aibă valori de adevăr diferite:

6. Arătați că propoziția:

$$(\forall v) (\exists v') P(v, v') \cdot (\forall v) \neg P(v, v) \cdot (\exists v) (\forall v') \neg P(v', v) \cdot (\forall v) (\forall v') (\forall v'') ((P(v, v'') \cdot P(v', v'') \rightarrow v = v'))$$

are numai model infinite.

7. Arătați că următoarele propoziții nu sunt valide, construind modele în care valoarea lor de adevăr este falsul:

- a) $((\exists v) P(v) \cdot (\exists v) Q(v)) \rightarrow (\exists v) (P(v) \cdot Q(v))$
- b) $((\forall v) (P(v) \rightarrow Q(v)) \cdot (\exists v) Q(v)) \rightarrow \neg (\exists v) P(v)$
- c) $(\forall v) (\exists v') P(v, v') \rightarrow (\exists v) P(v, v)$
- d) $((\forall v) (\exists v') P(v, v') \cdot (\forall v) (P(v, v) \rightarrow Q(v))) \rightarrow (\exists v) Q(v)$
- e) $((\forall v) (Q(v) \leftrightarrow (\forall v') P(v, v')) \cdot (\exists v') (\forall v) (Q(v') \leftrightarrow v = v')) \rightarrow (\forall v) (\forall v') ((P(v, v) \cdot P(v', v') \rightarrow v = v'))$

8. Demonstrați următoarele metateoreme:

a) Dacă ϕ și ψ sunt propoziții, atunci

$$\models \phi \leftrightarrow \psi \text{ dacă } \phi \models \psi \text{ și } \psi \models \phi$$

b) Dacă $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ și χ sunt propoziții, atunci

$$\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi \leftrightarrow \chi \text{ dacă } \phi_1, \dots, \phi_n \models \psi \text{ și } \phi_1, \dots, \phi_n \models \chi$$

c) Dacă ϕ și ψ sunt propoziții, $\models \phi \leftrightarrow \psi$, iar ϕ e o subformulă a lui χ și $\chi(\phi/\psi)$ e rezultatul înlocuirii în χ a lui ϕ prin ψ , atunci

$$\models \chi \leftrightarrow \chi(\phi/\psi)$$

$$d) (\forall v_1) \dots (\forall v_n) (\phi \leftrightarrow \psi) \models \chi \leftrightarrow \chi(\phi/\psi)$$

unde toate variabilele care apar în ϕ și ψ sunt printre $v_1, \dots, v_n$.

9. Spunem că o mulțime Σ de propoziții ale unui limbaj L de ordinul întâi are modele arbitrar de mari, dacă pentru orice număr natural n , există un model al lui Σ al cărui domeniu are cel puțin n elemente.

Arătați că

a) Dacă Σ are modele arbitrar de mari, atunci are un model infinit;

b) Nici o propoziție nu e adevărată în toate și numai modelele finite ale lui L .

10. Fie un limbaj $L = \{<\}$ și o teorie în L având următoarele axiome:

$$a) (\forall v) - (v < v)$$

$$b) (\forall v) (\forall v') (\forall v'') ((v < v' \cdot v' < v'') \rightarrow v < v'')$$

$$c) (\forall v) (\forall v') (v < v' \vee v' < v \vee v = v')$$

$$d) (\forall v) (\exists v') (v < v')$$

$$e) (\forall v) (\exists v') (v' < v)$$

$$f) (\forall v) (\forall v') (v < v' \rightarrow (\exists v'') (v < v'' \cdot v'' < v'))$$

Arătați că toate modelele infinite numărabile ale teoriei sunt izomorfe.

11. Fie R o relație binară și R^* o relație definită astfel:

$$R^*(c, c) = \text{df } ((\forall X) (X(c) \cdot (\forall v) (\forall v') ((X(v) \cdot R(v, v')) \rightarrow X(v')))) \rightarrow X(c))$$

a) Arătați că următoarele propoziții sunt valide:

$$i) (\forall v) (\forall v') (R(v, v') \rightarrow R^*(v, v'))$$

ii) R^* este reflexivă și tranzitivă.

b) Dacă $R(c, c')$ are înțelesul: c e un copil al c' , care este înțelesul lui $R^*(c, c')$?

12. Spunem că o formulă este în formă normală *prenexă* dacă toți cuantificatorii sunt plasați în extrema ei stângă; o formulă este *universală* dacă e dată în forma prenexă și toți cuantificatorii ei sunt universali; și este *existențială* dacă e dată în forma prenexă și toți cuantificatorii ei sunt existențiali. Arătați că:

a) Dacă φ este universală, $M \models \varphi$ și M' e un submodel al lui M , atunci $M' \models \varphi$.

b) Dacă φ este existențială, $M \models \varphi$ și M este un submodel al lui M' , atunci $M' \models \varphi$.

13. Fie M și M' două modele elementar echivalente ale unui limbaj L . Să presupunem că fiecare element al domeniului lui M este interpretarea unei constante a lui L , și la fel pentru M' . Arătați că, în acest caz, M și M' sunt izomorfe.

14. Demonstrați propozițiile: (10.9), (10.10), (10.11), (10.12).

C a p i t o l u l I V

C U A N T I F I C A R E Ș I F O R M A L I Z A R E

Am văzut, în capitolul anterior, că logica de ordinul întâi a predicatelor e îndeajuns de puternică pentru a putea reconstrui în cadrul ei teorii interesante și puternice (precum teoria mulțimilor ori aritmetica lui Peano). Atari reconstrucții în logica de ordinul întâi ne permit să înțelegem mai bine natura susținerilor noastre – altfel zis, structura logică a acestora – precum și relațiile logice dintre ele. Reconstrucțiile în logica de ordinul întâi sunt menite așadar să releve *forma logică* a acestor susțineri.

Acum ne putem întreba: care este forma logică a unora dintre cele mai comune susțineri pe care le facem? De pildă, ne-am putea întreba ce susțineri facem atunci când formulăm propoziții ca:

- (1) Toți caii sunt mamifere.
- (2) Toți inorogii sunt mamifere.
- (3) Președintele de astăzi al Rusiei este un politician abil.
- (4) Regele de astăzi al Franței este inteligent.
- (5) Pegas nu există.
- (6) Există tigri bengalezi.

Să remarcăm, mai întâi, că unele dintre aceste propoziții sunt în chip evident foarte importante pentru filosofi. Astfel, ultimele două sunt importante pentru că exprimă afirmații sau negații despre existența a ceva; la rândul lor, primele două au jucat un rol remarcabil în istoria gândirii europene: într-adevăr, identificată cu logica, silogistica lui Aristotel lua propoziții precum acestea ca singurele care redau natura reală a susținerilor noastre despre lume. În sfârșit, filosofi precum B. Russell au argumentat viguros că propoziții precum (3) și (4) sunt deosebit de relevante în unele chestiuni filosofice.

Acum ne-am putea întreba: Cum putem reda în logica de ordinul întâi propoziții ca cele de mai sus? Și, în al doilea rând, ce obținem odată ce vom fi reușit într-o astfel de întreprindere? Voi lăsa pentru paragrafele următoare ale

acestui capitol configurarea unui răspuns la prima întrebare. Dar de pe acum aş vrea să menţionez motivele pentru care am ales – din clasa atât de vastă a propoziţiilor din limba română (şi, în acelaşi timp, semnificative pentru un filosof) – pe acelea pe care le-am tratat aici. În primul paragraf vom aborda propoziţiile categorice. Teoria lor – silogistica – a fost formulată încă în Antichitate de Aristotel. Problema care va fi abordată aici e aceea a posibilităţii de a traduce silogistica în logica de ordinul întâi. Cum vom vedea, traducerea este posibilă, dar nu e unică: filosoful – ghidat de consideraţii nu numai logice, dar şi epistemologice ori metafizice – va putea să aprecieze corespunzător cele două traduceri alternative pe care le vom menţiona.

Logicile multisortate şi cuantificarea restrânsă sunt, la rândul lor, două modalităţi alternative de a formaliza într-un limbaj de ordinul întâi propoziţii din limba naturală. Cum vom vedea, fiecare alternativă are avantajele şi dezavantajele sale; apoi, există modalităţi sistematice de a corela cele două alternative (prin intermediul unor teoreme de „reprezentare” a unui limbaj de ordinul întâi într-altul tot de ordinul întâi). Întrebarea care rămâne este însă dacă putem pretinde că o traducere, mai mult decât alta, redă *forma logică* a propoziţiilor de la care am plecat.

Ultimele două paragrafe ale capitolului sunt foarte importante pentru un filosof: acolo sunt prezentate diferite strategii de a aborda susţineri despre obiectele individuale – susţineri că ele au anumite proprietăţi ori că există. Este posibil să formulăm astfel de susţineri în logica de ordinul întâi? Iar dacă pornim de la ipoteza că răspunsul este afirmativ, cum vom proceda? Probabil că cel mai important rezultat care decurge din cele două paragrafe e că forma logică a susţinerilor noastre despre obiectele individuale nu e aceeaşi cu forma lor gramaticală; că structura logică, exprimată de traducerea, formalizarea lor într-un limbaj de ordinul întâi, uneori nu poate fi recunoscută prin simpla privire la felul în care acea susţinere arată când o exprimăm în limba naturală.

Cu aceasta am ajuns la cea de-a doua întrebare: Presupunând că vom fi reuşit să traducem într-un limbaj de ordinul întâi diferite susţineri din limba naturală, care e noima acestui succes? Ideea fundamentală a acelor filosofi care s-au angajat în dezvoltarea logicii filosofice a fost aceea că astfel vom fi recunoscut *sensul real* al susţinerilor noastre; că nu vom mai fi induşi în eroare de ingrediente accidentali ai acestora (între care se află forma gramaticală a susţinerilor noastre, atunci când le producem într-o limbă naturală). De exemplu, eu spun că există tigri bengalezi. Ce spune însă în realitate această susţinere a mea? Răspunsul pare simplu: spune ceva despre tigrii bengalezi, anume că ei sunt printre obiectele din lumea noastră. Numai că, odată ce vom încerca, plecând de la această ipoteză, să formalizăm în logica de ordinul întâi o astfel de susţinere, vom vedea că întâlnim dificultăţi grave. O traducere mai adecvată a ei în logica de ordinul întâi ne solicită să admitem că forma ei logică e alta decât cea pe care am

presupus-o (anume, vom admite că ea nu spune ceva despre niște obiecte – tigri bengalezi – ci despre un concept – conceptul de a fi tigr bengalez: că el e astfel încât cel puțin un obiect cade sub el). Pentru filosof, acest rezultat poate fi extrem de important. El va trebui să decidă: să tragă concluzii epistemologice ori metafizice plecând de la ceea ce o susținere apare ca exprimând, când e formulată în limba naturală, sau să tragă o atare concluzie plecând de la ceea ce o susținere apare ca exprimând când e dată într-un limbaj logic de ordinul întâi.

Logicianul ar paria pe cea de-a doua cale; dar filosoful poate încă să rămână în dubiu. Important e însă, chiar de pe acum, că o prejudecată s-a zguduit: aceea că, atunci când facem o susținere (în limba naturală), suntem siguri care e natura a ceea ce susținem realmente.

§ 18. Propozițiile categorice

Fie $L = \{ A, I, a, b, c, \dots \}$ un limbaj în care A și I sunt simboluri predicative binare, iar $a, b, c \dots$ sunt constante individuale. Să construim în L o teorie SA închisă numită *silogistica aristotelică*. SA are următoarele axiome:

$$A1. (\forall v) Avv$$

$$A2. (\forall v) Ivv$$

$$A3. (\forall v) (\forall v_1) (\forall v_2) ((Avv_1 \cdot Av_2v) \rightarrow Av_2v_1)$$

$$A4. (\forall v) (\forall v_1) (\forall v_2) ((Avv_1 \cdot Ivv_2) \rightarrow Iv_2v_1)$$

Pentru a simplifica notația, am scris, de pildă Avv_1 în loc de $A(v, v_1)$ sau Ivv_2 în loc de $I(v, v_2)$. Se definesc două noi relații, E și O , precum urmează:

$$D_1. E(v, v_1) = df - I(v, v_1)$$

$$D_2. O(v, v_1) = df - A(v, v_1)$$

Intuiția care stă în spatele acestei construcții este aceea de a interpreta expresiile de forma Aab, Eab, lab și Oab ca *propoziții categorice*. O propoziție categorică este de forma subiect-predicat și afirmă sau neagă predicatul despre tot sau despre o parte a subiectului. Propozițiile categorice sunt de patru feluri:

- a) propoziții universal afirmative, de forma: Toți a sunt b ; formal: Aab ;
- b) propoziții universal negative, de forma: Nici un a nu este b ; formal:

Eab ;

- c) propoziții particular afirmative, de forma: Unii a sunt b ; formal: lab ;
- d) propoziții particular negative, de forma: Unii a nu sunt b ; formal: Oab .

În cadrul teoriei SA pot fi demonstrate ca teoreme toate raționamentele cunoscute sub numele de *inferențe imediate*, precum și toate *modurile silogistice*. Ca exemplu, iată câteva teoreme ale teoriei SA :

T1. $(\forall v_1)(\forall v_2)(Av_1v_2 \rightarrow Iv_2v_1)$	(conversiunea universal afirmativei)
T2. $(\forall v_1)(\forall v_2)(Iv_1v_2 \rightarrow Iv_2v_1)$	(conversiunea particular afirmativei)
T3. $(\forall v_1)(\forall v_2)(Ev_1v_2 \rightarrow Ev_2v_1)$	(conversiunea universal negativei)
T4. $(\forall v_1)(\forall v_2)(Av_1v_2 \rightarrow Iv_1v_2)$	(subalternarea particular afirmativei față de universal afirmativă)
T5. $(\forall v_1)(\forall v_2)(Ev_1v_2 \rightarrow Ov_1v_2)$	(subalternarea particular negativei față de universal negativă)
T6. $(\forall v_1)(\forall v_2)(Av_1v_2 \rightarrow -Ev_1v_2)$	(contrarietatea dintre universalele afirmativă și negativă)
T7. $(\forall v_1)(\forall v_2)(Iv_1v_2 \vee Ov_1v_2)$	(subcontrarietatea dintre particularele afirmativă și negativă)
T8. $(\forall v)(\forall v_1)(\forall v_2)((Evv_1 \cdot Av_2v) \rightarrow Ev_2v_1)$	(modul Celarent)
T9. $(\forall v)(\forall v_1)(\forall v_2)((Avv_1 \cdot Iv_2v) \rightarrow Iv_2v_1)$	(modul Darii)
T10. $(\forall v)(\forall v_1)(\forall v_2)((Evv_1 \cdot Iv_2v) \rightarrow Ov_2v_1)$	(modul Ferio)

De fapt, se poate demonstra următorul rezultat general: în teoria SA sunt teoreme toate inferențele imediate și toate modurile silogistice admise de Aristotel; nu sunt teoreme toate inferențele mediate și toate modurile silogistice respinse de Aristotel¹.

Această modalitate de a construi silogistica aristotelică drept o teorie formalizată de ordinul întâi provine din cercetările logicianului polonez J. Łukasiewicz; voi spune de aceea că această axiomatizare a silogisticii aristotelice este de tip Łukasiewicz.

Să trecem acum la semantică. Un model pentru L este o structură $\langle D, R, R' \rangle$, unde D este o colecție de obiecte, iar R și R' sunt relații binare pe D , R fiind interpretarea lui A și R' interpretarea lui I . Modelul standard al teoriei SA se construiește astfel: D este o colecție de mulțimi nevide de obiecte și nici un obiect din D nu le cuprinde pe toate celelalte; A este interpretată ca relația de incluziune între elementele domeniului, iar I ca o relație care are loc între două obiecte ale domeniului dacă și numai dacă intersecția acestora este nevidă. Se observă ușor că, într-un astfel de model M , avem:

$$M \models SA$$

Spre exemplu, $(\forall v) Avv$ este adevărată întrucât pentru orice mulțime X din D este întotdeauna cazul că $X \subseteq X$; A_3 este adevărată în M în virtutea tranzitivității relației de incluziune între mulțimi etc. Să observăm că, pentru

¹ În acest sens a se vedea, de exemplu, monografia lui I. Didilescu și P. Botezatu, *Silogistica. Teoria clasică și interpretările moderne*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976, în special pp. 38-126 și 374-380.

a arăta că $A_2: (\forall v) Ivv$ e nevoie să facem apel la cerința ca toate mulțimile cuprinse în D să fie *nevide*.

Silogistica aristotelică a fost construită aici ca o teorie de ordinul întâi, în limbajul $L = \{A, I, a, b, c, \dots\}$. Acestei construcții de tip Lukasiewicz i se pot aduce însă câteva obiecții. În primul rând, constantele individuale $a, b, c \dots$ sunt înțelese, în mod intuitiv, ca termeni care denotă clase de obiecte, individuale. Lucrul acesta se poate observa cu ușurință dacă luăm în seamă modelul standard al silogisticii aristotelice SA : prin funcția de interpretare, constantei individuale a , de pildă, îi va corespunde un obiect din domeniul D ; însă, pe de altă parte, acest obiect trebuie tratat ca o clasă de obiecte. Să luăm propoziția:

(18.1) Toți oamenii sunt muritori.

Ea va fi formalizată în limbajul L după cum urmează: notăm „om” cu a și „muritor” cu b . Obținem propoziția

(18.1') Toți a sunt b .

care în L este:

(18.1'') Aab

În L tratăm expresiile „om” și „muritor” drept constante individuale; dar, intuitiv, acesta ne apar ca *simboluri predicative*.

Așadar, o formalizare adecvată în logica de ordinul întâi a silogisticii ar trebui să trateze termenii (care în propozițiile categorice joacă rolul de subiect sau predicat) ca simboluri predicative, mai degrabă decât ca expresii constante individuale.

O a doua obiecție este aceea că în L silogistica aristotelică este tratată ca o teorie de ordinul întâi finit axiomatizabilă (în fapt, ea are patru axiome). Acest lucru este posibil pentru că termenii silogistici $a, b, c \dots$ sunt tratați drept constante individuale și deci – cum limbajul L este de ordinul întâi – avem la dispoziție variabile cuantificabile care iau termenii ca valori. În mod obișnuit, silogistica este însă înțeleasă ca o teorie care e dată prin schema axiomatice, nu prin axiome. Să luăm, de pildă, axioma.

$A_3: (\forall v) (\forall v_1) (\forall v_2) ((Avv_2 \cdot Av_2v) \rightarrow Av_2v_1)$

Ea reprezintă modul silogistic Barbara, din figura întâi silogistică. În mod obișnuit, acest mod e prezentat în felul următor:

(18.2) $M \quad A \quad P$
 $\quad \quad \underline{S \quad A \quad M}$
 $\quad \quad S \quad A \quad P$

unde M, S și P sunt simboluri care stau pentru termenii silogismului. Toate silogismele de tip Barbara sunt valide: aceasta înseamnă că orice termeni concreți am pune în locul simbolurilor M, S și P , niciodată nu vom obține un silogism

ale cărui premise să fie adevărate iar concluzia falsă. Însă acest lucru nu trebuie înțeles în sensul că simbolurile M , S și P sunt variabile (cuantificate universal) care pot fi instanțiale cu diverși termeni concreți. Mai curând M , S și P sunt *metasimboluri* – simboluri pe care le folosim în metalimbaj pentru a numi termenii concreți. De aici decurge că (18.2) este nu o formulă, ci o *schemă* de raționament. În mod tradițional, silogistica a fost prezentată cu ajutorul schemelor de raționament; nu avem a face cu axiome silogistice, ci cu scheme axiomatice silogistice.

În al treilea rând, în formalizarea de tip Lukasiewicz se iau ca primitive relațiile silogistice A și I . Problema este dacă nu cumva ele pot fi definite. Fie din nou propoziția (18.1). Cel ce a studiat logica predicărilor de ordinul întâi este imediat tentat să-i ofere următoarea formalizare: notăm „om” cu F și „muritor” cu G . Aici F și G sunt simboluri predicative. Într-un limbaj de ordinul întâi, care conține aceste simboluri, propoziția (18.1) va fi formalizată prin:

$$(18.3) (\forall v) (F(v) \rightarrow G(v))$$

În (18.3), în afara celor două simboluri predicative, nu intervin decât simboluri logice: variabile, cuantificatori, conective logice; împreună, acestea dau seamă însă de rolul pe care, în formalizarea de tip Lukasiewicz, se admitea că îl are relația silogistică A . Potrivit interpretării (18.3) relația A este însă definibilă în termeni logici. Obiecția ar suna, deci, astfel: formalizarea de tip Lukasiewicz este redundantă, căci ia ca simboluri predicative (în limbajul de ordinul întâi considerat) relații logice.

Toate acestea sugerează o altă modalitate de a construi silogistica aristotelică drept teorie de ordinul întâi. Fie $L' = \{F, G, H \dots\}$ un limbaj de ordinul întâi, în care $F, G, H \dots$ sunt simboluri predicative unare. Propozițiile categorice de tip A, E, I, O se formalizează în acest limbaj astfel:

a) propoziții de tip A (Toți F sunt G): $(\forall v) (F(v) \rightarrow G(v))$ prescurtat: FaG ;

b) propoziții de tip E (Nici un F nu este G): $(\forall v) (F(v) \rightarrow \neg G(v))$, prescurtat: FeG ;

c) propoziții de tip I (Unii F sunt G): $(\exists v) (F(v) \cdot G(v))$, prescurtat: FiG ;

d) propoziții de tip O (Unii F nu sunt G): $(\exists v) (F(v) \cdot \neg G(v))$, prescurtat: FoG .

Cum în L nu apar simboluri propriu-zis silogistice, nu putem construi silogistica aristotelică drept o teorie cu anumite axiome, sau scheme axiomatice *nelogice*. Problema revine la a determina ce raționamente de o anumită formă sunt *demonstrabile* în L' (sau, echivalent, prin teorema de completitudine: sunt *valide* în L').

Vom folosi literele $M, N, P \dots$ ca *metavariabile* pentru simbolurile predicative $F, G, H \dots$. Se poate demonstra următoarea teoremă:

T 11. Următoarele formule sunt demonstrabile în L' :

- a) MaM ;
- b) $(MaP \cdot NaM) \rightarrow NaP$;
- c) $(MaP \cdot MiN) \rightarrow NiP$.

Se observă ușor că cele trei scheme axiomatice corespund în L' axiomelor A_1, A_3 , ale SA , formulate în L . În L' nu este însă demonstrabilă și formula MiM , corespunzătoare axiomei A_2 . Acest fapt face ca în L' să nu fie demonstrabile acele inferențe imediate cu propoziții categorice și acele moduri silogistice legate de formula MiM . În particular, nu se pot demonstra:

- i) subalternarea particularelor față de universale;
- ii) conversiunea universal afirmativei;
- iii) modurile silogistice demonstrabile în SA cu premise universale, dar cu concluzie particulară.

Acele inferențe imediate cu propoziții categorice și moduri silogistice demonstrabile în L' constituie *silogistica absolută*. Ne interesează însă dacă se poate găsi o formalizare în L' a propozițiilor categorice și a raționamentelor cu acestea sub care să fie demonstrabile toate (și numai) teoremele silogisticii aristotelice. Vom dovedi că următoarea teoremă are loc:

T 12. Presupunem că există o funcție f care pune în corespondență biunivocă simbolurile predicative din L' și constantele individuale din L . Atunci: pentru orice formulă ϕ a lui L în care nu apare nici o variabilă există o formulă ϕ^* a lui L' , astfel încât

ϕ este teoremă a lui SA dacă și numai dacă ϕ^* este demonstrabilă în L' .

Să subliniem că atât L cât și L' sunt limbaje de ordinul întâi; prin urmare, atât în L ca și în L' silogistica este construită ca o teorie de ordinul întâi. Însă în L' această teorie cuprinde doar propoziții demonstrabile; în acest sens se poate spune că în L' silogistica este „scufundată” în logica predicatorilor de ordinul întâi sau că are un „model” exact în această logică.

Corespondența dintre formulele (fără variabile ale) lui L și formulele lui L' se construiește astfel. Fie mai întâi un simbol predicativ M din L . M se numește aristotelic (și scriem $Ar(M)$ în acest caz) dacă are loc:

$$(\exists v) M(v) \cdot (\exists v) \neg M(v)$$

Fie acum o formulă ψ a lui L' în care apar simbolurile predicative $M_1, M_2, \dots, M_n$. Se definește formula ψ_A ca:

$$(Ar(M_1) \cdot Ar(M_2) \cdot \dots \cdot Ar(M_n)) \rightarrow \psi$$

(mai pe scurt, vom scrie: $\psi_A = Ar(\psi) \rightarrow \psi$)

Procedăm acum la construirea corespondenței dintre formulele lui L și cele ale lui L' . Vom defini o funcție g astfel:

- (i) $g(Aab) = (\forall v) (f(a)(v) \rightarrow f(b)(v))$
- (ii) $g(Eab) = (\forall v) (f(a)(v) \rightarrow \neg f(b)(v))$
- (iii) $g(Iab) = (\exists v) (f(a)(v) \cdot f(b)(v))$
- (iv) $g(Oab) = (\exists v) (f(a)(v) \cdot \neg f(b)(v))$
- (v) $g(\neg \varphi) = \neg g(\varphi)$
- (vi) $g(\varphi \cdot \psi) = g(\varphi) \cdot g(\psi)$; $g(\varphi \vee \psi) = g(\varphi) \vee g(\psi)$ etc.

Vom pune, pentru orice formulă φ fără variabile a lui L , $\varphi^* = (g(\varphi))_A = \text{Ar}(g(\varphi)) \rightarrow g(\varphi)$

Să presupunem, de exemplu, că φ este Iab ; să luăm $f(a) = M$ și $f(b) = N$. Atunci $g(Iab)$ va fi $(\exists v) (M(v) \cdot N(v))$, iar $(Iab)^*$ va fi:

$$((\exists v) (M(v) \cdot (\exists v) \neg (M(v) \cdot (\exists v) N(v) \cdot (\exists v) \neg N(v))) \rightarrow (\exists v) (M(v) \cdot N(v)))$$

Să observăm că traducerea $A2^*$ a axiomei A_2 a SA este demonstrabilă. Într-adevăr, traducerea ei $(Iaa)^*$ în L' este

$$((\exists v) (M(v) \cdot (\exists v) \neg M(v)) \rightarrow (\exists v) (M(v) \cdot M(v)))$$

care e evident demonstrabilă. Exemplul arată în ce constă exact diferența dintre această traducere și cea menționată mai sus, dar care nu făcea dreptate decât silogisticii absolute: vechea traducere este valabilă sub condiția ca simbolurile predicative folosite să fie aristotelice – adică, să nu fie vide sau totale. Când această condiție e împlinită, A_2 este admisă; or, cum am văzut, ea era cea care, în modelul standard al SA , formulată în L , cerea ca interpretările constantelor individuale să fie nevide. Vom numi această construcție traducerea Jaskowski¹ a formulelor lui L în cele ale lui L' , iar rezultatul exprimat prin T_{12} – teorema lui Jaskowski.

Să trecem acum propriu-zis la demonstrarea teoremei T_{12} .

a) Suficiența: dacă φ este teoremă a lui SA , atunci φ^* este demonstrabilă în L' . Demonstrația este trivială în cazul axiomelor $A1$, $A3$ și $A4$; $A2$ a fost menționată mai devreme. Acum să presupunem că pentru formulele φ și $\varphi \rightarrow \psi$ teorema este valabilă, deci că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt teoreme ale lui SA , atunci φ^* și $(\varphi \rightarrow \psi)^*$ sunt demonstrabile în L' . Atunci ψ^* e demonstrabilă în L' . Dar se observă ușor că:

- (1) $(\varphi \rightarrow \psi)^* = \text{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\varphi \rightarrow \psi)$
 - (2) $(\varphi \rightarrow \psi)^* = \text{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (g(\varphi) \rightarrow g(\psi))$
 - (3) $(\varphi \rightarrow \psi)^* \rightarrow (\text{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\varphi)) \rightarrow (\text{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\psi))$
- Dar, conform definiției lui g și a lui Ar , avem:
- (4) $\text{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \text{Ar}(g(\varphi))$

¹ A se vedea S. Vieru, *Axiomatizări și modele ale sistemelor silogistice*, Editura Academiei, București, 1975, pp. 61–72.

și cum prin supoziție φ^* , adică

$$(5) \text{Ar}(g(\varphi)) \rightarrow g(\varphi)$$

este demonstrabilă în L' , înseamnă (din (4) și (5)) că și

$$(6) \text{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\varphi)$$

e demonstrabilă în L' . Din (3) și (6) decurge că formula

$$(7) \text{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\psi)$$

e validă în L' . Formulei (7) îi putem aplica teorema de interpolare a lui Craig.

Exercițiu: să se arate că $\text{Ar}(g(\psi))$ este interpolantul căutat (a se folosi exercițiul 32 de la capitolul I, § 6). Atunci este demonstrabilă în L' :

$$(8) \text{Ar}(g(\psi)) \rightarrow g(\psi)$$

adică ψ^* .

b) Necesitatea: dacă φ^* este demonstrabilă în L' , atunci φ e teorema în SA . Vom demonstra că dacă φ nu e teoremă în SA , atunci φ^* nu e demonstrabilă în L' . Să presupunem, într-adevăr, că φ nu e teoremă a lui SA . Atunci mulțimea $\{\neg\varphi\}$ este SA consistentă și deci, conform teoremei de completitudine, aplicată lui $\{\neg\varphi\}$ (o mulțime de formule ale limbajului L)— φ este adevărată într-un model al SA . Să luăm acest model ca fiind standard. Fie $T(\neg\varphi)$ mulțimea constantelor individuale ce apar în $\neg\varphi$ (și, deci, φ). Prin interpretare, fiecărui element din $T(\neg\varphi)$ îi corespunde o mulțime nevidă și netotală. Vom arăta acum că M este și un model al lui L' și că φ^* este falsă în M . Știm că φ^* este $\text{Ar}(g(\varphi)) \rightarrow g(\varphi)$; să arătăm că $\neg(\varphi^*) = \text{Ar}(g(\varphi)) \cdot \neg g(\varphi)$ e adevărată în M . Primul conjunct $\text{Ar}(g(\varphi))$ e adevărat în M . Într-adevăr, el afirmă că pentru orice constantă individuală a din L care apare în φ , e adevărat că

$$(\exists v) f(a)(v) \cdot (\exists v) f(a)(v)$$

deci că extensiunea la M a simbolului predicativ ce corespunde lui a este o mulțime nevidă și netotală — ceea ce tocmai s-a presupus, odată admis că M este standard. Faptul că $\neg g(\varphi)$ e adevărată în M se demonstrează prin inducție asupra complexității lui φ . Demonstrația e lungă, dar nu e dificilă. Ea va fi lăsată ca exercițiu cititorului.

Am arătat că $\neg(\varphi^*)$ are un model; prin urmare, aplicând din nou teorema de completitudine (de data aceasta mulțimii $\{\neg(\varphi^*)\}$ de formule ale lui L'), obținem că $\{\neg(\varphi^*)\}$ este consistentă și deci că φ^* nu este demonstrabilă în L' , q.e.d.

§ 19. Cuantificarea restrânsă și logicile multisortate

De multe ori trebuie să manevrăm propoziții în care diferitele variabile au domenii de valori diferite. De pildă, când spunem:

(19.1.1) Oricine a cumpărat ceva de la Ionescu.

(magazinul lui Ionescu fiind singurul din sat, să zicem), cuantificatorul „oricine” are ca domeniu locuitorii satului, în timp ce cuantificatorul „ceva” are ca domeniu

mărfurile din magazinul lui Ionescu. Desigur că am putea încerca să formalizăm pe (19.1.1) prin

$$(19.1.2) (\forall v) (\exists v') C(v, v', c)$$

unde C este predicatul a cumpăra, iar constanta c este un nume al lui Ionescu. Însă e limpede că ceva e greșit cu această formalizare; căci dacă ea ar fi corectă, atunci propoziția:

(19.1.3) Oltul a cumpărat Luna de la Ionescu

ar trebui să fie cel puțin cu sens – ceea ce intuitiv cu siguranță că nu e cazul. De multe ori, ceva asemănător se întâmplă atunci când lucrăm cu diverse teorii științifice. În geometrie, de pildă, vrem să vorbim despre lucruri atât de diferite cum sunt punctele, dreptele ori planele. Fie, de exemplu, propozițiile:

(19.2.1) Între oricare două puncte se află un al treilea.

(19.2.2) Pe orice dreaptă se află cel puțin un punct.

E natural să încercăm să le formalizăm, prin:

$$(19.2.1') (\forall v) (\forall v') (\exists v'') I(v'', v, v')$$

unde I este predicatul: a se afla între, și, respectiv,

$$(19.2.2') (\forall v) (\exists v') P(v', v)$$

unde P este predicatul a se afla pe. Dar iarăși ceva nu e în regulă cu cele două formalizări, fiindcă din (19.2.1') nu putem deriva

$$(19.2.1'') (\forall v') (\exists v'') I(v'', c, v')$$

unde c e un nume pentru o dreaptă, căci predicatul I e înțeles ca exprimând o relație între trei puncte, câtă vreme, potrivit lui (19.2.1'') expresia $I(v'', c, v')$ trebuie să exprime o relație între două puncte și o dreaptă. Tot așa, din (19.2.2') nu putem deduce pe

$$(19.2.2'') (\exists v') P(v', c)$$

unde c e un nume pentru un punct: acum predicatul P : a se afla pe – care stabilește o legătură între un punct și o dreaptă – ar trebui să aibă loc între două puncte.

Vom analiza două strategii de a face față acestor dificultăți. Prima este motivată sintactic: conform acesteia, expresii ca $P(v', c)$ sau $I(v'', c, v')$ sau (19.1.3) nu sunt bine construite. Lingviștii au discutat pe larg această opțiune, luând exemple precum

(19.3) Idei verzi necolorate dorm furioase.

Această strategie a condus la elaborarea așa-numitelor *logici multisortate*. Cea de a doua strategie a motivată semantic: potrivit ei, problema nu e aceea de a construi anumite expresii, ci de a le atribui în mod corespunzător valori de adevăr. Aplicarea ei face uz pe larg de conceptul de *cuantificare restrânsă*.

a) *Logicile multisortate*. Într-un limbaj L_n multisortat (cu n sorturi) constantelor individuale le este atașat un sort (și vom scrie $c_1^m, c_2^{m''}$ etc., unde m

și m'' sunt sorturile lui c_1 , respectiv c_2); intuitiv, sortul atașat unei constante indică genul de obiecte pe care le poate denota acea constantă. De pildă, unele constante pot denota oameni, altele mărfuri cumpărate de aceștia, altele râuri; sau unele pot denota puncte, altele linii, altele planuri etc. Corespunzător, se introduc variabile de diferite sorturi v_i^m (indicele superior indică sortul variabilei) care iau ca valori obiecte de un anumit sort. Mai departe, predicatele și simbolurile funcționale sunt astfel încât locurile lor goale pot fi ocupate doar de termeni de sorturi corespunzătoare. De pildă, predicatul C^3 (a cumpăra) e luat astfel încât primul și al treilea loc gol pot fi ocupate doar de termeni care stau pentru oameni (= de sortul oamenilor), în timp ce al doilea poate fi ocupat doar de un termen de sortul mărfurilor. Atunci, o formalizare corespunzătoare a lui (19.1.1) va fi, de pildă,

$$(19.1.4) (\forall v_1^1) (\exists v_1^2) C(v_1^1, v_1^2, c^1).$$

În genere, unui loc dintr-un predicat îi pot conveni termeni de mai mult de un sort; dar, pentru a simplifica, vom presupune mai jos că fiecare loc din fiecare predicat trebuie completat cu termeni de un singur sort.

Cerințele de mai sus sunt suficiente pentru a construi formulele atomare ale limbajului Ln ; construirea formulelor mai complexe nu pune probleme speciale, în afara faptului că trebuie să fim mereu atenți la sortul variabilelor folosite.

E important de reținut aici faptul următor: o expresie ca $C(v_1^1, v_2^1, c^1)$ nu e, potrivit strategiei urmate acum, o formulă bine formată a lui Ln . Ea este exclusă pe considerente *sintactice*; nu avem cum spune că, relativ la un model, ei i se poate atribui o valoare. La fel, (19.1.3) va fi *nu falsă*, ci *lipsită de sens*.

Să ne amintim acum de logica de ordinul doi, discutată în § 16. Într-o anumită măsură, logica de ordinul doi ar putea fi considerată ca o logică specială multisortată (de fapt, bisortată). Vom relua câteva expresii ale acelei logici. De exemplu, expresia

$$(19.4) (\exists X) (\forall v) (X(v) = v)$$

spune că există o funcție identitate; expresia

$$(19.5) (\forall v) (\forall v') (\exists X) (X(v) \cdot X(v'))$$

spune că orice două obiecte au cel puțin o proprietate în comun. Cele două principii ale identității sunt exprimabile de asemenea în această logică:

$$(19.6.1) (\text{Principiul identității indiscernabililor})$$

$$(\forall v) (\forall v') ((\forall X) (X(v) \leftrightarrow X(v')) \rightarrow v = v')$$

$$(19.6.2) (\text{Principiul indiscernabilității identicilor})$$

$$(\forall v) (\forall v') (v = v' \rightarrow (\forall X) (X(v) \leftrightarrow X(v')))$$

Se vede ușor deja din aceste patru expresii că am utilizat două sorturi de variabile: unele pentru obiecte individuale, altele pentru proprietăți ale acestora. Pentru a face evident acest lucru, am putea, bunăoară, să modificăm pe (19.5) în:

$$(19.5.1) (\forall v^1_1) (\forall v^1_2) (\exists v^2_1) (v^2_1(v^1_1) \cdot v^2_1(v^1_2))$$

Dar aceasta nu este încă o expresie a unei logici multisortate. Într-adevăr, într-o logică multisortată variabilele de diferite sorturi umplu locurile goale într-un predicat; dar aici, în expresia $v_1^2(v_1^1)$ să zicem, variabila v_1^2 stă în locul unui predicat.

De aceea, pentru a construi logica de ordinul doi ca o logică multisortată, vom proceda astfel: fie L limbajul în care am construi logica de ordinul întâi. Construim un nou limbaj L_2 bisortat după cum urmează:

(i) pentru fiecare constantă individuală c a lui L , în L_2 există o constantă c^1 ;

(ii) pentru fiecare literă predicativă P a lui L , în L_2 există o constantă c_P^2 ;

(iii) pentru fiecare număr n , în L_2 introducem un predicat $n + 1$ -ar - A^n (predicatul aplicabilității);

(iv) pentru fiecare simbol funcțional f al lui L există în L_2 un simbol funcțional f^1 .

În formalizarea lui L_2 se folosesc două sorturi de variabile, cele individuale: v_1^1, v_2^1 etc. și cele predicative: v_1^2, v_2^2 etc. Acum construim o traducere H a termenilor și a formulelor lui L în termenii și, respectiv, formulele lui L_2

a) Construcția termenilor lui L_2 :

(i) dacă t este o constantă individuală, atunci $H(t) = c^1$;

(ii) dacă t este o variabilă individuală v , atunci $H(v) = v^1$;

(iii) dacă t este o variabilă predicativă X , atunci $H(X) = v^2$;

(iv) dacă t este o constantă funcțională f , atunci $H(t) = f^1$;

(v) dacă t este $t(t_1, \dots, t_n)$, atunci $H(t) = H(t_1) (H(t_2) \dots H(t_n))$.

b) Traducerea formulelor lui L :

(i) $H(t_1 = t_2)$ este $H(t_1) = H(t_2)$;

(ii) dacă P este un predicat n -ar, atunci
 $H(P(t_1, \dots, t_n)) = A^{n+1}(c_P^2, H(t_1), \dots, H(t_n))$;

(iii) $H(\neg \varphi) = \neg H(\varphi)$;

(iv) $H(\varphi \rightarrow \psi) = H(\varphi) \rightarrow H(\psi)$;

(v) $H(\forall v \varphi) = (\forall v^1) H(\varphi)$;

(vi) $H(\forall X \varphi) = (\forall v^2) H(\varphi)$.

Elementul interesant este, desigur, punctul (ii) al acestei ultime definiții. Predicatele A^n sunt astfel încât primul loc nu poate fi ocupat decât de o constantă sau o variabilă de ordinul doi (cel „predicativ”), iar celelalte locuri nu pot fi ocupate decât de termeni de sortul întâi (cel „individual”). De aceea, expresii ca $A^2(c_1^1, c_2^1)$ sau $A^2(c_1^2, c_2^2)$ sunt prost construite sintactic. Să luăm propoziția:

(19.7) Socrate este filozof.

În L_2 ea e formalizată astfel: i) se introduce o constantă c^1 ca nume pentru individul Socrate; ii) se introduce o constantă c^2 ca nume pentru predicatul filosof; iii) se introduce predicatul A^2 . Acum, (19.7) devine:

$$(19.7.1) A^2(c^2, c^1)$$

pe care o citim: predicatul filosof se aplică individului Socrate.

Existența constantelor (și a variabilelor) de sorturi diferite are următoarea consecință semantică: domeniul unui model pentru L_n trebuie împărțit în n subdomenii, astfel încât constantele de sortul i să fie interpretate în subdomeniul i , iar cuantificatorii aplicați unei variabile de sortul i să vizeze doar subdomeniul i . Într-un fel, modelul nu mai e de forma $M = \langle D, \dots \rangle$, ci de forma $M = \langle D_1, \dots, D_n, \dots \rangle$.

Cum am văzut în § 16, logica de ordinul doi are anumite proprietăți remarcabile. În ea cad teoremele Löwenheim-Skolem, de compactitate și de completitudine. Se păstrează aceste rezultate și pentru traducerea ei în L_2 ? Altfel zis, încalcă logica bisortată L_2 construită mai sus compactitatea și teoremele Löwenheim-Skolem? Cum vom arăta mai jos, răspunsul e negativ. Se demonstrează că

(19.8) Relativ la L_2 se pot proba:

- a) teoremele Löwenheim-Skolem;
- b) teorema de compactitate;
- c) teorema de completitudine.

Rezultatul acesta nu trebuie să ne surprindă odată ce observăm că în semantica pentru L_2 apelăm la predicatele de aplicabilitate, A^n : în acea semantică, noi nu avem entități (indivizi) și proprietățile lor – ca în semantica logicii de ordinul doi – ci *simularea* lor cu ajutorul a două genuri de entități și a relațiilor de aplicabilitate între acestea. Dacă între logica de ordinul doi și logica bisortată construită apar discrepanțe, aceasta nu înseamnă decât că simularea nu e perfectă, că deci înțelesul intuitiv al relațiilor A^n nu e captat în întregime de axiome și că în logica L_2 pot fi justificate *numai* acele inferențe care depind de cerințele pe care le putem impune explicit asupra relațiilor A^n .

b) *Cuantificarea restrânsă*. Să luăm următoarele două propoziții:

(19.9.1) Toți filosofii sunt inteligenți.

(19.9.2) Unii elevi sunt sportivi.

Ele se formalizează foarte ușor prin:

(19.9.1') $(\forall v)(F(v) \rightarrow I(v))$

(19.9.2') $(\exists v)(E(v) \cdot S(v))$.

Vom spune că $(\forall v)$ este *restrâns* la $F(v)$ în (19.9.1') și că $(\exists v)$ este *restrâns* la $E(v)$ în (19.9.2'). În general, dacă ϕ e o formulă cu o singură variabilă liberă v , vom spune că $(\forall v)$ e *restrâns* la $\phi(v)$ în formula $(\forall v)(\phi(v) \rightarrow \dots)$ și că $(\exists v)$ e *restrâns* la $\phi(v)$ în $(\exists v)(\phi(v) \cdot \dots)$.

Cuantificarea *restrânsă* e folositoare atunci când într-o expresie sunt menționate entități de diferite sorturi, de pildă oameni și mărfuri, ca în (19.1.1). Pentru a formaliza aceste expresii, potrivit strategiei cuantificării *restrânse* trebuie procedat în felul următor. Mai întâi, se introduc predicate speciale pentru fiecare din sorturile de entități menționate; apoi se folosește *restrângerea* cuantificatorilor. De exemplu, pentru a formaliza pe (19.1.1) trebuie introduse – în afara predicatului temar C : a cumpăra – încă două predicate: P (pentru *persoană*) și M (pentru *marfă*). Atunci, în locul lui (19.1.2) vom avea:

(19.1.5) $(\forall v)(P(v) \rightarrow (\exists v')(M(v') \cdot P(c) \cdot C(v, v', c)))$

În formula de mai sus, cuantificatorul $(\forall v)$ este *restrâns* la $P(v)$, iar cuantificatorul $(\exists v')$ este *restrâns* la $M(v')$.

Să luăm acum propoziția:

(19.1.6) Orice om de pe strada noastră a cumpărat ceva de la Ionescu.

Apelăm la predicatul S : a locui pe strada noastră și formalizăm:

(19.1.6') $(\forall v)(P(v) \cdot S(v) \rightarrow (\exists v')(M(v') \cdot P(c) \cdot C(v, v', c)))$

Acum cuantificatorul $(\forall v)$ e *restrâns* la $P(v) \cdot S(v)$. Pentru a evidenția mai bine acest lucru, e folositor să folosim următoarea notație: vom scrie $(\forall v)^{P(v)}$ în loc de $(\forall v)(\phi(v) \rightarrow \dots)$ și $(\exists v)^{M(v)}$ în loc de $(\exists v)(\phi(v) \cdot \dots)$. Atunci vom putea scrie:

(19.10.1) $(\forall v)^{P(v)} I(v)$

(19.10.2) $(\exists v)^{M(v)} S(v)$

(19.10.3) $(\forall v)^{P(v)} (\exists v')^{M(v')} (P(c) \cdot C(v, v', c))$

(19.10.4) $(\forall v)^{P(v) \cdot S(v)} (\exists v')^{M(v')} (P(c) \cdot C(v, v', c))$

În loc de (19.9.1'), respectiv (19.9.2'), (19.1.5), (19.1.6').

Procedura aceasta are consecințe diferite de cea a logicilor multisortate. Astfel, semantic nu mai e nevoie să împărțim domeniul unui model în subdomenii: domeniul va cuprinde entități de toate sorturile de care e nevoie. În al doilea rând, condițiile sintactice asupra construirii expresiilor se relaxează: locurile goale într-un predicat pot fi completate cu variabile ori constante pentru orice obiect. De pildă, dacă c_1 e un nume pentru Olt, iar c_2 un nume pentru Lună, atunci propoziția (19.1.2) se va formaliza

(19.1.2') $P(c_1) \cdot M(c_2) \cdot P(c) \cdot C(c_1, c_2, c)$

Potrivit strategiei logicilor multisortate, (19.1.2') este fără sens – o expresie gramatical prost construită, căci cuprinde pe $C(c_1, c_2, c)$. Potrivit strategiei cuantificării *restrânse*, ea este cu sens; dar nu e adevărată, fiindcă $P(c_1)$ și $M(c_2)$ nu sunt adevărate.

Observăm că, pentru a pune la lucru strategia cuantificării restrânse, trebuie să introducem noi constante predicative în limbaj, câte un predicat unar pentru fiecare sort. Acest lucru ne permite să obținem unele rezultate foarte importante. Fie L_n un limbaj multisortat, iar L_n^* un limbaj de ordinul întâi definit în felul următor:

(i) dacă P este o constantă predicativă din L_n , atunci P este o constantă predicativă în L_n^* ;

(ii) pentru fiecare sort i , în L_n^* există un predicat S_i ;

(iii) pentru fiecare termen individual t de sortul i , în L_n^* există un termen t .

Putem să traducem orice formulă φ a lui L_n într-una $H(\varphi)$ a lui L_n^* , în felul următor:

(i) dacă φ e o expresie atomică de forma $t_1 = t_2$ și în t_1 și t_2 apar termenii constanți $t_{i_1}, \dots, t_{i_m}$, având sorturile $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, atunci $H(\varphi)$ este $t_1 = t_2 \cdot S_{j_1}(t_{i_1}) \cdot \dots \cdot S_{j_m}(t_{i_m})$;

(ii) dacă φ e o expresie atomică de forma $P(t_1, \dots, t_n)$ și în φ apar termenii constanți $t_{i_1}, \dots, t_{i_m}$ având sorturile $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, atunci $H(\varphi)$ este $P(t_1, \dots, t_n) \cdot S_{j_1}(t_{i_1}) \cdot \dots \cdot S_{j_m}(t_{i_m})$;

(iii) $H(\neg \varphi) = \neg H(\varphi)$;

(iv) $H(\varphi \rightarrow \psi) = H(\varphi) \rightarrow H(\psi)$;

(v) $H(\forall v^i \varphi) = (\forall v^i)(S_i(v^i) \rightarrow \varphi)$;

(vi) $H(\exists v^i \varphi) = (\exists v^i)(S_i(v^i) \cdot \varphi)$.

Trebuie notat că în L_n^* variabilele nu sunt de sorturi diferite; indicii superiori ai variabilelor, care în L_n foloseau pentru a le indica sortul, acum servesc numai pentru a diferenția între două variabile diferite.

Urmează cele mai importante rezultate privitoare la relația dintre logica multisortată și logica cuantificațională restrânsă.

(19.11) O propoziție φ este demonstrabilă în L_n dacă și numai dacă traducerea ei $H(\varphi)$ este demonstrabilă în L_n^* .

(19.12) O mulțime Σ de propoziții ale lui L_n este consistentă în L_n dacă și numai dacă $H(\Sigma)$ – mulțimea traducerilor în L_n^* ale acestor propoziții – este consistentă în L_n^* .

Teoremele de mai sus conduc imediat la demonstrarea lui (19.8). Pentru aceasta trebuie să ținem cont că propozițiile limbajului bisortat L_2 se traduc în propoziții ale unui limbaj de ordinul întâi L^2 , pentru care teoremele lui Löwenheim-Skolem, de compactitate și de completitudine au loc.

§ 20. Descripțiile

Pentru a vorbi despre obiecte, se folosesc *termenii*. În § 10 s-a introdus definiția termenilor într-un limbaj L de ordinul întâi. O reamintesc:

(10.1) Definiția termenilor lui L :

- a) o variabilă este un termen;
- b) un simbol constant din L este un termen;
- c) dacă F este un simbol funcțional m -ar din L și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni, atunci $F(t_1, \dots, t_m)$ este un termen;
- d) un șir de simboluri logice sau ale lui L este un termen dacă și numai dacă se poate obține prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a) – (c).

Desigur, variabilele individuale nu denotă într-un model anumite obiecte particulare; ideea introducerii lor a fost tocmai aceea de a le folosi pentru a denota obiecte diferite. Potrivit definiției funcției de interpretare, în orice model fiecare constantă individuală denotă un obiect precizat; ea denotă întotdeauna și denotă un singur obiect. Rolul constantelor individuale într-un limbaj de ordinul întâi este asemănător cu cel al *numelor proprii* în limbile naturale. Filosofi precum Frege și Russell au argumentat că numele proprii nu pot să nu denote; în același timp, fiind „proprii”, aceste nume denotă un singur obiect.

Dacă însă numele proprii ar fi singurele mijloace de care am dispune pentru a vorbi despre obiecte particulare, ar fi imposibil să facem acest lucru dacă nu am ști numele obiectelor; dar desigur că, de multe ori, vrem – și reușim – să vorbim despre obiecte chiar dacă nu cunoaștem cum au fost botezate. Așa ceva se întâmplă pentru că, alături de nume proprii, în limbajele pe care le folosim avem la îndemână și alte genuri de expresii care denotă obiectele particulare. E vorba de cele construite cu ajutorul simbolurilor funcționale. Să luăm câteva exemple de astăzi de simboluri funcționale:

(20.1.1) Orașul care este capitala...

(20.1.2) Acel număr natural care este suma dintre numerele naturale... și ...

(20.1.3) Soția lui ...

(20.1.4) Soția primului președinte al statului...

În primul, al treilea și al patrulea exemplu apar simboluri funcționare *unare*: punând în locurile goale un termen, se obține un termen. De pildă, avem (în cel de-al treilea exemplu):

(20.2.1) Soția lui Elvis Presley

(20.2.2) Soția lui M. Gorbaciov

(20.2.3) Soția lui I. Kant

(20.2.4) Soția primului președinte al U.R.S.S.

Cel de-al patrulea exemplu este mai interesant, căci în el apar două simboluri funcționale, anume: „soția lui...” și „primul președinte al...”; dacă în celelalte două exemple considerate termenii obținuți erau de forma $F(t)$, în acesta toți termenii sunt de forma $F(F'(t))$. (Astfel de termeni pot fi obținuți și în cazul în care avem un singur simbol funcțional, punând în locul liber un termen complex, cum se vede în expresia (20.2.4)).

În al doilea exemplu avem un simbol funcțional cu două locuri goale. În cel de-al cincilea nu avem nici un loc gol; desigur, expresia „primul om care a pășit pe...” este un simbol funcțional unar, însă „primul om care a pășit pe Lună” este deja un termen constant. Am putea spune, forțând puțin, că acesta este un simbol funcțional 0-ar, sau cu zero locuri goale.

În termeni precum cei construiți aici, alături de constante individuale, apar expresii predicative (precum: „... este soția lui...”; „... este președinte al...”; „... este om care a pășit pe Lună” etc.), care pot fi compuse; de asemenea, în acești termeni este utilizat articolul hotărât (când scriem: soția lui..., președintele..., orașul care... etc.). Astfel de termeni se numesc *descripții definite* (sau, pe scurt: *descripții*). În cele ce urmează nu vom admite ca într-o descripție definită să apară variabile libere. Pentru a evidenția structura unei descripții – deci faptul că ea cuprinde 1) o expresie predicativă; 2) articolul hotărât; 3) eventual, constante individuale – vom folosi următoarea notație: introducem *iota operatorul*, care, precum cuantificatorii universal și existențial, se aplică unei variabile și este urmat de o expresie predicativă unară. Descripții vor fi, de pildă, $(\exists v) P(v)$, $(\exists v) R(c, v)$, $(\exists v)(P(v) \cdot Q(c, v))$ etc., prin care formalizăm, să zicem: „cel mai cunoscut actor francez”, respectiv „soția lui M. Gorbaciov”, „cel mai cunoscut actor francez care a turnat filme la Hollywood”. Să observăm, în fine, că, întrucât sunt termeni, descripțiile pot apărea printre argumentele unui predicat n -ar la fel ca o variabilă sau o constantă individuală.

Cu ajutorul descripțiilor putem obține propoziții precum:

- | | |
|--|--|
| (20.3.1) $R((\exists v) P(v))$ | Primul președinte al U.R.S.S. este chel |
| (20.3.2) $c = (\exists v) P(v)$ | M. Gorbaciov este primul președinte al U.R.S.S. |
| (20.3.3) $(\exists v) P(v) = (\exists v) Q(v)$ | Primul președinte al U.R.S.S. este inițiatorul perestroicii. |
| (20.3.4) $(\exists v)(\exists v) (R'(v) \cdot R''(v, (\exists v) P(v)))$ | Unii ruși îl admiră pe primul președinte al U.R.S.S. |
| (20.3.5) $c' = (\exists v) S(v, (\exists v) P(v))$ | Raisa Gorbaciova este soția primului președinte al U.R.S.S. |

(Pentru a simplifica, am scris $(\lambda v) P(v)$ pentru: primul președinte al U.R.S.S.; mai corect ar fi fost, desigur, să scriem $(\lambda v) P(v, b)$ cu b o constantă individuală).

Nu vom insista mai mult asupra aspectelor sintactice; sintactic, descripțiile definite sunt un gen de termeni complecși – iar în § 10 felul în care se pot folosi aceștia în expresiile unui limbaj de ordinul întâi a fost definit în chip riguros. Să trecem acum la aspectele semantice. Fie deci o descripție $(\lambda v) P(v)$. Într-un model M vom interpreta această descripție ca un obiect al domeniului D al lui M , și anume ca acel unic obiect x care face adevărată formula $P(v)$. Vom scrie:

(20.4) Interpretarea descripției $(\lambda v) P(v)$ în modelul M este acel unic obiect $x \in D$ astfel încât $M \models P(v) ((x))$.

Există totuși o problemă cu această definiție. În § 11, când am definit valoarea unui termen t , am admis întotdeauna că acesta există: valoarea lui t e, prin definiția (11.1), un obiect din domeniul oricărui model. Dar, dacă extensiunea lui P la M nu este un *singur* obiect, definiția (20.4) nu mai reușește să ne spună cum să interpretăm pe $(\lambda v) P(v)$ la M . Apoi, este întrutotul posibil ca o descripție să nu aibă nici o interpretare într-un model. Să presupunem că în limbajul L avem descripții precum:

(20.5.1) Soția lui I. Kant

(20.5.2) Muntele de aur

(20.5.4) Soția lui Henric al VIII-lea.

Dacă modelul pe care îl avem în vedere este o parte a lumii actuale atunci evident că, potrivit lui (20.4), aceste descripții sunt nedefinite: nu putem afla un *unic* obiect prin care să interpretăm în acest model descripția (în primele două exemple, nu există nici un astfel de obiect; în al treilea – există mai mult de un obiect).

Acum să luăm propozițiile:

(20.6.1) Soția lui I. Kant era scundă.

(20.6.2) Muntele de aur este înalt.

(20.6.3) Regele de astăzi al Franței este chel.

(20.6.4) Anne Bullen a fost soția lui Henric al VIII-lea.

Primele trei sunt de forma lui (20.3.1): $R(\lambda v) P(v)$, iar a patra e de forma lui (20.3.2): $c = (\lambda v) P(v)$. Cum nu există în nici unul din aceste cazuri un unic obiect în model care satisface pe P , înseamnă că nu vom putea determina pentru propozițiile ca întreg valoarea lor de adevăr. Propozițiile (20.6) nu vor fi nici adevărate și nici false. În acest caz însă, unele propoziții ale limbajului nu ar avea o valoare de adevăr în unele modele (în acelea în care descripției nu îi corespunde un unic obiect din domeniu).

Această situație nu este deloc fericită; odată admisă, ar trebui să ne lipsim de unele dintre cele mai puternice instrumente folosite în teoria modelelor (un

exemplu: nu s-ar mai putea construi modelele canonice pentru demonstrațiile de completitudine). Dificultatea se poate totuși ocoli; iată mai jos trei strategii în acest sens.

1. *Strategia lui A. Meinong*. Ea constă în următoarele: denotatul descripției $(\exists v) P(v)$ în modelul M este acel unic obiect x , astfel încât $M \models P(v) ((x))$; dacă nu există un astfel de obiect, atunci modelul M se modifică adăugând domeniului un obiect x_p , astfel încât P este unic satisfăcut în M de x_p . De pildă, dacă $(\exists v) P(v)$ este descripția *muntele de aur* și ea nu are o interpretare unică în modelul M , atunci se adaugă domeniului D un unic obiect – muntele de aur. Atunci pentru P (= munte de aur) condiția (20.4) e implicită. Și tot așa se adaugă câte un obiect în domeniu pentru fiecare descripție – soția lui Kant, regele de astăzi al Franței etc.

Elaborarea în amănunțime a strategiei lui Meinong este însă foarte dificilă și nu vom putea să insistăm aici mai mult asupra ei; în ultimii ani au fost dezvoltate semantici meinongiene, însă relativ la limbaje logice mai bogate (așa-numitele limbaje intensionale). Iată doar trei dificultăți cărora trebuie să le facă față acestea. Mai întâi, strategia lui Meinong e prea îngăduitoare cu entitățile pe care le admitem ca obiecte în ontologie. Cum ea se aplică oricărei descripții, ar trebui să adăugăm în D nu numai obiecte precum muntele de aur, soția lui I. Kant ori regele de astăzi al Franței, ci și obiecte precum pătratul rotund, ori cel mai mare număr natural – care sunt imposibile, nu doar neactuale. Într-adevăr, dacă notăm cu P proprietatea a fi pătrat, iar cu R – proprietatea a fi rotund, atunci, potrivit strategiei meinongiene, spre a satisface propoziția (20.4) relativ la descripția $(\exists v) (P(v) \cdot R(v))$, ar trebui să adăugăm în domeniul fiecărui model M un obiect: pătratul rotund. Însă e greu de admis că există astfel de obiecte; și e, de asemenea, greu de văzut cum ar putea fi manevrate acestea. Cea de a doua dificultate vizează chiar acest lucru. Strategia lui Meinong este, așa cum am văzut, o cale de a păstra puțința de a atașa o valoare de adevăr oricărei propoziții ce conține o descripție fără denotat. Dar se pare că prețul plătit e prea mare. Într-adevăr, s-ar putea argumenta în felul următor: orice propoziție de forma „Obiectul care este P și S este P ” este adevărată, de pildă: „Cartea roșie este roșie”. Dar atunci ar trebui ca propozițiile

(20.7.1) Pătratul rotund este rotund.

(20.7.2) Pătratul rotund este pătrat

să fie adevărate în orice model. Însă cum a fi rotund și a fi pătrat sunt proprietăți incompatibile, din (20.7.1) decurge că propoziția

(20.7.3) Pătratul rotund nu este pătrat

va fi adevărată în orice model. Or, ar trebui să admitem, în acest caz, că există o propoziție ϕ astfel încât pentru orice model M am avea $M \models \phi$ și $M \models \neg\phi$, ceea ce nu e acceptabil.

O a treia dificultate pornește de la observația următoare: să presupunem că P este predicatul munte de aur. Construim acum descripția $(\exists v)P(v)$: „muntele de aur”. Potrivit strategiei lui Meinong, vom adăuga modelului M , în care descripția nu are denotat unic, un obiect x_p – muntele de aur. Problema este însă aceasta; acum în M va fi adevărată propoziția $(\exists v)P(v)$. De pildă, în modelul M care e inclus în lumea actuală – și în care „muntele de aur” nu are denotat – va fi adevărat că există un obiect care e munte de aur. Or, acest lucru nu e acceptabil.

Soluția lui Meinong este aceea de a strânge toate aceste obiecte nou adăugate domeniului D al modelului M într-o colecție D' (să o numim *domeniul extern* al lui M) și de a reinterpreta cuantificatorii în sensul că $(\exists v)Q(v)$ e adevărată dacă există un obiect în D (să îl numim *domeniul intern* al lui M) care satisface predicatul Q , dar nu e adevărată dacă acel obiect e în domeniul extern; tot așa $(\forall v)Q(v)$ va fi adevărată dacă Q e satisfăcută de toate obiectele din domeniul intern. Obiectele din domeniul extern nu au statutul ontologic de a exista în M ; Meinong zicea că astfel de obiecte trebuie într-un fel presupuse ca fiind – și acest lucru e realizat prin construcția domeniului extern. Dar ele nu există – au un alt statut ontologic.

Totuși, această procedură naște câteva observații critice. Unii filosofi – precum Quine – au argumentat ca atari obiecte cuprinse în domeniul extern nu sunt filosoficește „respectabile”, și aceasta pentru că în cazul lor nu avem criterii clare de identitate. Pe ce temei putem spune că regele de astăzi al Franței nu este același individ ca și regele de astăzi al Italiei? Căci poate că în acel tărâm în care aceștia există Italia și Franța s-au unit sub același cârmuitor!

În al doilea rând, chiar Meinong a susținut că obiecte precum regele de astăzi al Franței sunt „incomplete”, adică nu e adevărat că, oricare ar fi proprietatea P , ele au fie P fie non- P . Într-adevăr, despre regele de astăzi al Franței nu știm dacă are ochii căprui sau nu; pur și simplu propoziția:

Regele de astăzi al Franței are ochii căprui
este indeterminată – nu avem cum decide nici dacă e adevărată și nici dacă e falsă. Însă nu putem da seama de aceasta în semantica folosită aici, fiindcă pentru orice propoziție ϕ avem fie $M \models \phi$, fie $M \models \neg\phi$.

În al treilea rând, strategia lui Meinong conduce la admiterea faptului că ar exista relații „veritabile” între obiectele din domeniul intern și cele din domeniul extern al unui model (deci, între obiectele „existente” și cele „neexistente”). Într-adevăr, dacă în limbajul nostru există predicatul „mai înalt”, atunci în M ar trebui ca propoziția:

Regele de astăzi al Franței este mai înalt decât regele de astăzi al Spaniei. să aibă o valoare de adevăr. Însă, intuitiv, noi considerăm mai degrabă că această propoziție este indeterminată.

2. *Strategia lui G. Frege.* Ea constă în următoarele: oricare ar fi modelul M , domeniul său e construit astfel încât să includă un obiect x_0 , numit *obiectul nul*. Acum, potrivit lui Frege denotatul descripției $(\lambda v) P(v)$ în modelul M este acel unic obiect x astfel încât $M \models P(v) ((x))$; dacă nu există un astfel de obiect, atunci convențional punem pe x_0 ca denotat al lui $(\lambda v) P(v)$, deci luăm pe x_0 ca unic obiect care satisface în M pe P .

Strategia lui Frege face și ea ca în orice model orice descripție să aibă un denotat; ea e folosită de multe ori în matematică, atunci când cerem ca o funcție să fie definită pe o întregă mulțime. De pildă, dacă vrem ca scăderea $x - y$ să fie definită peste tot în N , punem convențional $x - y = 0$ când $y > x$. Desigur, această soluție este convențională, însă ea ajută la rezolvarea unor dificultăți.

Orice propoziție în care apare o descripție poate fi acum tratată astfel încât ea să aibă o valoare de adevăr. De exemplu, propoziția „Regele de astăzi al Franței este chel” va fi adevărată într-un model M dacă x_0 aparține extensiunii lui „chel” la M . Frege preferă ca x_0 să fie mulțimea vidă și interpretează propoziția de mai sus relativ la modelul M ca afirmând că mulțimea vidă este inclusă în extensiunea la M a lui „chel” – ceea ce este mereu adevărat.

Strategia lui Frege se bazează pe câteva teze. Le vom menționa aici, pentru a face mai limpede diferențele dintre acestea și cea de a treia strategie pe care o vom menționa – cea a lui B. Russell:

- (i) Orice propoziție este adevărată sau falsă.
- (ii) Orice descripție are întotdeauna denotat; descripțiile sunt tratate deci ca analoage numelor proprii.
- (iii) Denotatul unei descripții depinde exclusiv de structura acesteia (și nu, eventual, de propozițiile în care aceasta apare).
- (iv) În formalizarea propozițiilor în care apar descripții trebuie păstrat rolul în care apar acestea. De pildă, dacă o propoziție care gramatical are forma subiect-predicat are ca subiect o descripție $(\lambda v) P(v)$, atunci prin formalizare trebuie să obținem o propoziție în care un simbol predicativ e aplicat acestei descripții (e deci forma $R((\lambda v) P(v))$).

Să luăm două exemple; fie mai întâi propozițiile

(20.8.1) Mihail Gorbaciov este chel.

(20.8.1) Primul președinte al U.R.S.S. este chel.

În cele două propoziții pare rezonabil să admitem că numele propriu (*Mihail Gorbaciov*) și descripția (*primul președinte al U.R.S.S.*) au aceeași funcție sintactică: funcția de subiect al predicatului *este chel* – deci că Meinong și Frege

au dreptate să accentueze asupra analogiei dintre numele proprii și descripții. Dacă notăm expresia „Mihail Gorbaciov” cu c , expresia „primul Președinte al U.R.S.S.” cu c' iar predicatul „este chel” prin P , cele două propoziții vor fi formalizate prin $P(c)$, respectiv $P(c')$; ceea ce e important este că cele două propoziții sunt privite ca având aceeași formă logică. Să luăm însă acum propozițiile:

(20.9.1) Cineva este unicul autor al *Principiei Mathematica*.

(20.9.2) Nimeni nu este unicul autor al *Principiei Mathematica*.

Cum *Principia Mathematica* a fost scrisă împreună de A. N. Whitehead și B. Russell, intuitiv prima propoziție este falsă, iar a doua e adevărată. Să vedem ce se întâmplă punând la lucru strategiile lui Meinong și Frege de a trata descripțiile ca pe niște nume proprii. Să notăm cu c descripția „unicul autor al *Principiei Mathematica*”. Formalizând, obținem:

(20.9.1') $(\exists v) (v = c)$

(20.9.2') $-(\exists v) (v = c)$

Dar (20.9.1) este adevărată în orice model, iar (20.9.2') e falsă în orice model; prin formalizare am obținut valori de adevăr pe dos față de cele pe care, intuitiv, le atribuim celor două propoziții. Formalizarea nu este, desigur, adecvată – iar lucrul acesta aruncă o oarecare îndoială asupra adecvării strategiilor lui Meinong și Frege.

3. *Strategia lui B. Russell*. În articolul său *Despre denotare* apărut în 1905 în revista „Mind”, B. Russell propune o cu totul altă modalitate de a aborda descripțiile. El păstrează teza (i) – că orice propoziție este sau adevărată sau falsă (principiul bivalenței) – însă le respinge pe celelalte trei. Respingând teza (ii), Russell susține că nu orice descripție are întotdeauna denotat; el consideră că intuiția noastră nu e înșelătoare și că (în modelul cuprins în lumea actuală) o descripție precum „muntele de aur” sau „regele de astăzi al Franței” efectiv nu are denotat. Pentru Meinong și Frege, aceasta era doar o aparență; pentru Russell realmente atari descripții nu au denotat. Descripțiile nu sunt, așadar, pentru Russell analoage numelor proprii; expresiile denotative trebuie prin urmare împărțite în două mari clase: cele care pot fi tratate ca nume proprii și cele care pot fi tratate ca descripții. Prin urmare o descripție nu poate fi formalizată apelând la o constantă individuală; traducerile propozițiilor (20.9.1) și (20.9.2) de felul celor de mai sus sunt greșite.

Respingerea tezei (iv) reprezintă renunțarea la teza că forma gramaticală și forma logică „reală” a unei propoziții se suprapun. Suntem înșelați, consideră și Russell: dar nu de faptul că descripția realmente are denotat, câtă vreme pare să nu aibă, ci de faptul că propoziția pare să aibă descripția drept constituent efectiv, câtă vreme forma logică a propoziției nu cuprinde descripția drept constituent veritabil. Într-o propoziție precum: „Primul președinte al U.R.S.S. este chel”

aparent subiectul este descripția „primul președinte al U.R.S.S.“. Dar nu e așa, consideră Russell; în propoziții precum,

(20.10.1) Cineva a inventat un petpetuum mobile.

(20.10.2) Nimeni nu a pus piciorul pe Marte.

aparent expresiile „cineva“ și, respectiv, „nimeni“ joacă rolul de subiecte. Însă desigur că aceasta e numai o aparență. În propoziția

(20.10.3) Mihail Gorbaciov nu a pus piciorul pe Marte.

subiectul este realmente numele propriu „Mihail Gorbaciov“. Dar putem spune

(20.11.1) Mihail Gorbaciov este obosit.

câtă vreme propoziția

(20.11.2) Nimeni este obosit.

e absurdă. Că „nimeni“ nu e subiectul real al lui (20.10.2) se observă îndată ce formalizăm această propoziție într-un limbaj de ordinul întâi. Punând P pentru „a pus piciorul pe Marte“, (20.10.1) devine

(20.10.2') $(\forall v) - P(v)$

în care „nimeni“ nu mai apare ca subiect; această expresie a fost analizată cu ajutorul cuantificatorilor.

Situația este analoagă, susține Russell, cu descripțiile. Strategia lui Russell constă în a arăta cum putem analiza propozițiile în care apar descripțiile ca propoziții în care folosim numai cuantificatorii logicii standard a predicatelor. Atenție: această înlocuire a *iota operatorului* cu o expresie cuantificațională nu se face luând descripția în izolare (cum cerea teza (iii)); metoda lui Russell e cea a *definiției contextuale*: el arată cum putem înlocui o *propoziție* în care apare *iota operatorul* cu o altă propoziție, în care apar numai cuantificatorii obișnuiți. Așadar, strategia lui Russell nu e cea a definiției *explicite* a *iota operatorului*: nu se dă nici o definiție generală a acestuia.

Fie propoziția:

(20.12) Regele de astăzi al Franței este chel; formalizat: $P((\exists v) R(v))$,

în care apare descripția $(\exists v) P(v)$: regele de astăzi al Franței. Russell propune ca această propoziție să fie analizată astfel: există un individ v care are următoarele trei proprietăți:

a) v este astăzi rege al Franței: $R(v)$;

b) nu există nici un alt individ v' în afara lui v care are proprietatea de a fi astăzi rege al Franței: $(\forall v') (R(v') \rightarrow v' = v)$

c) v este chel: $P(v)$.

Aceasta înseamnă că propoziția (20.12) poate fi analizată în următoarea formulă a logicii predicatelor de ordinul întâi, în care nu mai apare *iota operatorul*:

(20.13) $(\exists v) (R(v) \cdot (\forall v') R(v') \rightarrow v' = v) \cdot P(v)$

În orice model M , (20.13) are o valoare de adevăr; în modelul inclus în lumea actuală, ea se întâmplă să fie falsă (cum se poate observa fără dificultate). Așadar, teza (i) este păstrată de strategia lui Russell.

Să notăm că (20.13) este echivalență în logica predicatelor cu următoarea expresie mai simplă:

$$(20.14) (\exists v) ((\forall v')(R(v') \leftrightarrow v' = v) \cdot P(v))$$

Cu aceasta putem formula următoarea definiție (contextuală) russelliană a iota operatorului:

$$(20.15) P((\iota v)R(v)) = df (\exists v) ((\forall v') (R(v') \leftrightarrow v = v') \cdot P(v))$$

Să observăm că în definiensul lui (20.15) nu apare nici o expresie care să denote un individ regele de astăzi al Franței. E drept, apare expresia predicativă: *rege de astăzi al Franței*; însă aceasta nu este, evident, un termen! Ea poate fi satisfăcută de nici un individ, de un individ sau de mai mulți indivizi; la orice model ea se interpretează nu ca un obiect, ci ca o *mulțime* (posibil vidă sau singulară) de obiecte. Așadar, definiensul lui (20.15) nu cuprinde descripția drept constituent.

De aici decurge o consecință foarte importantă: spre deosebire de strategiile lui Meinong și Frege, cea a lui Russell nu pune nici o problemă specială pe plan semantic: căci analizând iota operatorul în termeni cuantificaționali, nu apare nici o problemă de interpretare semantică. Prin urmare, nu e nevoie de utilizarea unei clauze de felul lui (20.4).

Până în prezent am avut în vedere doar propoziții afirmative în care apar descripții definite. Să considerăm însă o propoziție precum:

$$(20.16) \text{Regele de astăzi al Franței nu este chel.}$$

Cum am văzut, negația ei (20.12) este, potrivit strategiei lui Frege, adevărată într-un model M ori de câte ori descripția „regele de astăzi al Franței” nu are un unic denotat în M ; ca urmare, (20.16) va fi falsă în toate acele modele în care descripția nu are un unic denotat. Analiza pe care o oferă Russell propoziției (20.16) este mai subtilă. Aparent, arată el, propoziția (20.15) este pur și simplu negația lui (20.12): Regele de astăzi al Franței este chel, și prin urmare va fi adevărată în exact acele cazuri în care (20.12) este falsă. Russell ia însă propoziția (20.16) ca ambiguă; sub o citire, valoarea ei de adevăr va fi diferită de cea a lui (20.12), dar sub o altă citire ea va putea avea aceeași valoare de adevăr ca și (20.12).

Cele două modalități de a înțelege pe (20.16) sunt următoarele:

(20.16.1) Nu e cazul că există un unic individ care este rege al Franței și care este chel.

(20.16.2) Există un unic individ care este rege al Franței și care nu este chel.

Formal, avem, respectiv, expresiile:

$$(20.16.1') - (\exists v) ((\forall v') (R(v') \leftrightarrow v' = v) \cdot P(v))$$

$$(20.16.2') (\exists v) ((\forall v') (R(v') \leftrightarrow v' = v) \cdot \neg P(v))$$

Amândouă aceste formule pot fi obținute din propoziția (20.16): $\neg P((\exists v) R(v))$ apelând la definiția (contextuală) (20.15) a iota operatorului. În primul caz, aplicăm definiția (20.15) expresiei $P((\exists v) R(v))$ în (20.16): $\neg P((\exists v) R(v))$; astfel, negația are în domeniul său de aplicare cuantificatorul existențial, cum se vede de altfel din (20.16.1'). În cel de-al doilea caz, definiția (20.15) se aplică însăși expresiei $\neg P((\exists v) R(v))$; de data aceasta, cuantificatorul existențial are negația în domeniul său de aplicare. În terminologia lui Russell, potrivit primei citiri (exprimată în (20.16.1) și formalizată în (20.16.1')) a lui (20.16), negația este tratată ca având o *apariție primară*; potrivit celei de a doua citiri (exprimată în (20.16.2) și formalizată în (20.16.2')) a propoziției noastre, negația este tratată ca având o *apariție secundară*. Se observă ușor că propoziția (20.12) este negația lui (20.16.1), dar nu și a lui (20.16.2). În fapt, tratamentul aplicat de Russell face ca (20.12) și (20.16.2) să poată fi împreună false (ceea ce de altfel se întâmplă în modelul inclus în lumea actuală).

Propoziții ca (20.12): Regele de astăzi al Franței este chel, în care apar descripții care nu au un denotat unic, sunt – așa cum am văzut – false. Aceste propoziții nu încalcă teza (i) a bivalenței și, în acest sens, strategia lui Russell este încununată de succes. Însă, au argumentat unii autori, aici se află și slăbiciunea ei.

Obiecția lui K. Donnellan este aceea că inexistența denotatului unic nu garantează falsitatea propoziției. El consideră că atunci când analizăm o propoziție de forma $P((\exists v) R(v))$ sunt posibile două citiri ale acesteia: una *referențială* și una *atributivă*. Să luăm un exemplu. Presupunem că am ascultat la radio o piesă muzicală și că afirmăm:

(20.17) Autorul acestei piese muzicale este genial.

Potrivit citirii referențiale, sensul lui (20.17) este următorul:

(20.17.1) Există un unic individ care este autor al acestei piese muzicale și care este genial.

Formal, avem, ca în obișnuita transcriere russelliană:

$$(20.17.1') (\exists v) ((\forall v') (P(v') \leftrightarrow v' = v) \cdot G(v))$$

Prin (20.17.1) este selectat un individ (pe care îl denotă descripția) și i se atribuie acestuia o proprietate. Potrivit citirii atributive, sensul propoziției noastre inițiale e însă cu totul altul:

(20.17.2) Acel individ care este autor al acestei piese muzicale, oricare ar fi el, este genial.

Formal, această propoziție se transcrie cu totul altfel:

$$(20.17.2') (\forall v) ((\forall v') (P(v') \leftrightarrow v' = v) \rightarrow G(v))$$

Dacă în citirea referențială ne interesa să determinăm obiectul care e denotatul (unic) al descripției, în cea atributivă acest lucru nu ne mai interesează. Descripția nu e folosită acum pentru a vorbi despre un anumit obiect; mai degrabă accentul e pus pe caracteristica avută de acel obiect care se întâmplă să fie denotatul descripției. Să presupunem că, ascultând piesa muzicală, am recunoscut autorul ei – pe J. S. Bach, de pildă. Când am afirmat pe (20.17) eu mă refeream la J. S. Bach, și despre el comunicam ceva; propoziția trebuie luată deci ca exprimând aceeași judecată ca și (20.17.1). Dar să zicem că nu am recunoscut cine e autorul acelei lucrări. Când am afirmat pe (20.17) nu aveam prin urmare în vedere nici un individ anume. Spuneam însă că el trebuie să fie genial, dat fiind că acea lucrare avea caracteristicile pe care tocmai le remarcasem. Prin urmare, prin afirmația mea voiam să zic că autorul acelei lucrări – oricare ar fi el – în virtutea faptului că lucrarea are anumite caracteristici – e genial. Propoziția (20.17) va exprima aceeași judecată ca și (20.17.2).

Acum să presupunem că într-un model M descripția $(\lambda v) R(v)$ nu are nici un denotat. Propoziția $P((\lambda v) R(v))$ va fi falsă în M , potrivit citirii referențiale. Dar nu se întâmplă același lucru potrivit citirii atributive: într-adevăr, când într-un model M predicatul P nu e satisfăcut unic, propoziția (20.17.2') devine adevărată în M .

P. F. Strawson a formulat o altă obiecție la adresa strategiei lui B. Russell de analiză a descripțiilor. Atunci când analizăm o propoziție precum

(20.18) Inițiatorul perestroicii este chel.

în:

(20.18.1) Există un singur individ care a inițiat perestroica și care este chel. existența celui singur individ care are proprietatea de a fi inițiat perestroica este afirmată. Dar, consideră Strawson, acest lucru nu e ceva cuprins în propoziția noastră: mai degrabă el este *presupus* de către ea. Când cerem cuiva: „Închide fereastra!”, *presupunem* că fereastra este deschisă, dar nu și afirmăm acest lucru prin intermediul propoziției; iar dacă presupunerea nu e îndeplinită, atunci cererea de a închide fereastra este fără sens. Analog, existența unui unic denotat al descripției este o condiție pentru ca propoziția să fie adevărată sau falsă; dar dacă presupoziția aceasta nu este împlinită, propoziția nu va fi nici adevărată, nici falsă.

Potrivit lui Strawson (și spre deosebire de Frage ori Russell) teza (i) nu este valabilă; unele propoziții pot să nu aibă valoare de adevăr – anume, atunci când presuposițiile lor nu sunt îndeplinite. Bunăoară, propoziția (20.12): Regele de astăzi al Franței este chel nu e nici adevărată și nici falsă; astfel e și propoziția

(20.16): Regele de astăzi al Franței nu este chel – căci în ambele presupuziția existenței unei singure persoane care este rege al Franței nu este satisfăcută.

§ 21. Existența

În paragraful anterior am întâlnit deja unele dificultăți ce apar atunci când vrem să manevrăm termeni singulari care nu au denotat. Acolo am cercetat diferitele strategii propuse în cazul în care termenii singulari considerați erau descripții definite; dar nu am abordat și cazul în care era vorba de nume proprii; mai mult, nici în cazul descripțiilor nu am încercat să vedem ce se întâmplă cu afirmațiile (sau negațiile) de existență. Să luăm câteva exemple:

(21.1.1) Regele de astăzi al Franței există.

(21.1.2) Regele de astăzi al Franței nu există.

(21.1.3) Pegas există.

(21.1.4) Pegas nu există.

(21.1.5) Tigri bengalezi există.

(21.1.6) Tigri bengalezi nu există.

O primă sugestie ar fi următoarea: să se trateze aceste propoziții ca analoge propozițiilor predicative; cele afirmative, de pildă, ar urma să fie tratate tot așa precum, să zicem:

(21.2.1) Regele de astăzi al Franței este chel,
respectiv

(21.2.3) Pegas este cal înaripat.

(21.2.5) Tigri bengalezi sunt carnivori.

Interpretarea ar fi deci următoarea: când afirmăm că ceva există, îi atribuim o proprietate – existența; când negăm că ceva există, respingem că are proprietatea existenței. Dacă notăm cu „ $(\exists v) R(v)$ ” descripția „regele de astăzi al Franței”, cu „ c ” numele „Pegas”, cu „ F ” predicatul „tigr”, cu „ G ” predicatul „bengalez”, iar cu „ H ” predicatul existenței, propozițiile (21.1) se vor formaliza ca:

(21.1.1') $H((\exists v) R(v))$

(21.1.2') $\neg H((\exists v) R(v))$

(21.1.3') $H(c)$

(21.1.4') $\neg H(c)$

(21.1.5') $(\forall v) ((F(v) \cdot G(v)) \rightarrow H(v))$

(21.1.6') $\neg (\forall v) ((F(v) \cdot G(v)) \rightarrow H(v))$

(În cazul celei de-a doua și al celei de-a șaselea propoziții putem produce, desigur, două formalizări, după cum interpretăm negația ca aplicându-se întregii propoziții sau numai predicatului). Din nefericire însă, această încercare duce la dificultăți. De pildă, din (21.1.4') și din legea logică

$$\varphi(c) \rightarrow (\exists v) \varphi(v)$$

obținem propoziția:

$$(21.3) (\exists v) - H(v)$$

care se citește: există ceva care nu există – ceea ce desigur că, în afară de meinongieni, puțini dintre noi suntem tentați să admitem. Dar să ne aplecăm asupra ultimelor două propoziții. Dacă interpretăm negația ca aplicându-se întregii propoziții, ca în (21.1.6'), atunci din (21.1.6') se poate deduce cu ușurință (21.5) – ceea ce nu e prea de dorit. Dacă însă interpretăm negația ca aplicându-se doar predicatului, vom obține drept formalizare a lui (21.1.6) pe

$$(21.1.6'') (\forall v) ((F(v) \cdot G(v)) \rightarrow - H(v))$$

Necazul este că, dacă nu există tigri bengaleze, atunci atât (21.1.5') cât și (21.1.6'') ar fi adevărate, căci antecedentul e mereu fals; însă tocmai acest lucru nu vrem să se întâmple. Dacă, mai departe, am încerca să formalizăm pe (21.1.5) ca:

$$(21.1.5'') (\exists v) (F(v) \cdot G(v) \cdot H(v))$$

iar pe (21.1.6) ca

$$(21.1.6'') (\exists v) (F(v) \cdot G(v) \cdot - H(v))$$

atunci din ambele se deduce că $(\exists v) (F(v) \cdot G(v) - \text{există tigri bengaleze})$ – adică tocmai ceea ce (21.1.6) neagă.

Aceste dificultăți sugerează că nu putem produce formalizarea în logica de ordinul întâi a predicatelor a aserțiunilor existențiale într-un mod atât de direct. Existența nu pare să fie recuperabilă ca predicat. Să luăm și următoarea propoziție:

(21.4) Tigri bengaleze sunt rari.

Nici aceasta, evident, nu poate fi formalizată ca o propoziție predicativă: (21.4) nu afirmă că o proprietate – raritatea – se aplică fiecărui tigr bengalez. La fel ca raritatea, au sugerat unii filozofi, existența nu este o proprietate a obiectelor individuale. G. Frege și B. Russell au admis acest lucru: potrivit lor, existența spune ceva nu despre obiecte, ci despre proprietățile acestora. De pildă, propoziția (21.1.5) spune că proprietatea de a fi tigr bengalez e astfel încât e satisfăcută de cel puțin un obiect. Dar a fi satisfăcut de cel puțin un obiect e o proprietate a unei proprietăți, nu a unui obiect, tot așa cum a fi rar nu e o proprietate a fiecărui tigr bengalez, ci a colecției lor. După Frege, aserțiunile existențiale sunt numerice. De pildă, să luăm propoziția:

(21.5.1) Există doi studenți în clasă.

Deși „doi” e un adjectiv atașat predicatului „student”, nu putem formaliza pe (21.5.1) ca:

$$(21.5.1') (\exists v) (F(v) \cdot G(v))$$

unde „F” stă pentru „doi”, iar „G” pentru „student în clasă”. Căci despre nici un om nu putem spune că are proprietatea de a fi „doi”. Mai degrabă, „G” spune

ceva despre mulțimea studenților din clasă, anume că ea cuprinde doi membri. Fie propoziția:

(21.5.2) Există cel puțin doi studenți în clasă.

Dacă notăm cu „ F ” predicatul „student în clasă”, (21.5.2) se formalizează ușor ca:

$$(21.5.2') (\exists v) (\exists v') (F(v) \cdot F(v') \cdot v \neq v')$$

Pe de altă parte, propoziția

(21.5.3) Există cel mult doi studenți în clasă se poate formaliza astfel: dacă găsim trei oameni, care sunt studenți în clasă, atunci am numărat unul de două ori. Adică:

$$(21.5.3') (\forall v) (\forall v') (\forall v'') ((F(v) \cdot F(v') \cdot F(v'')) \rightarrow v = v' \vee v = v'' \vee v' = v'')$$

Acum propoziția (21.5.1) spune de fapt că:

(21.5.4) Exact doi studenți sunt în clasă,

ceea ce se formalizează, desigur, prin conjuncția lui (21.5.2') și (21.5.3'). Să trecem acum la (21.1.5). Ea spune, de fapt, că

(21.5.5) Există cel puțin un tigru bengalez.

Aceasta se formalizează ușor ca:

$$(21.5.5') (\exists v) (F(v) \cdot G(v))$$

unde, ca mai sus, „ F ” stă pentru „tigru”, iar „ G ” pentru „bengalez”. Cuantificatorul existențial spune că cele două predicate au în comun ceva: faptul că sunt satisfăcute deodată de cel puțin un obiect. Așadar, cuantificatorul transmite o informație despre predicate (și despre proprietățile corespunzătoare lor). De pildă, formalizând propoziția

(21.5.6) Există cel puțin un student în clasă

ca

$$(21.5.6') (\exists v) (F(v))$$

cuantificatorul spune că predicatul „ F ” are proprietatea de a fi satisfăcut de cel puțin un obiect.

Dacă însă încercăm să aplicăm această strategie propoziției (21.1.3): Pegas există (ori lui 21.1.4), nu vom reuși. Acest fapt l-a făcut pe Frege să declare că (21.1.3) și (21.1.4) sunt fără sens: existența nu se poate cupla cu numele proprii. Să observăm încă un lucru. Fie numele propriu „Dumnezeu”; să punem „ c ” pentru acest nume. Potrivit legilor identității, avem

$$(21.1.6) c = c.$$

Dar de aici decurge, în logica de ordinul întâi:

$$(21.6.1) (\exists v) (v = c)$$

care spune că există ceva care este Dumnezeu – sau, mai pe scurt, că Dumnezeu există. De bună seamă că o atare procedură atât de simplă de a demonstra existența lui Dumnezeu ar stâmi invidia chiar și a susținătorilor argumentului ontologic.

Cea mai ușoară cale de a bloca concluzia (21.6.1) e aceea de a nega, în stil russellian, că „Dumnezeu” este nume propriu – și, deci, că în limbajul logicii de ordinul întâi îi corespunde o constantă individuală; „Dumnezeu” ar fi, de fapt, o descripție deghizată, de forma $(\exists v) D(v)$ (acel v care este dumnezeu; am scris „dumnezeu” fără majusculă, tocmai pentru a indica faptul că aici această expresie este predicativă). Atunci (21.6.1) e de fapt

$$(21.6.2) (\exists v) (v' = (\exists v) D(v))$$

Potrivit teoriei descripțiilor a lui Russell, (21.6.1) se analizează în

$$(21.6.3) (\exists v) (\forall v') (D(v') \leftrightarrow v' = v) \cdot (\exists v) (v' = v)$$

Or, această ultimă expresie de bună seamă că nu e lege logică și deci nu poate fi dedusă din $(\exists v) D(v) = (\exists v) D(v)$

În paragraful anterior am văzut că B. Russell a conchis din faptul că unii termeni singulari nu au denotat că, de fapt, aceștia nu sunt termeni. Descripțiile sunt numai aparent constituenți veritabili ai propozițiilor; analizând aceste propoziții, obținem expresii în care descripțiile nu mai apar. La fel se întâmplă și cu acele propoziții în care apar nume proprii, de exemplu cu

(21.7.1) Pegas este cal cu aripi.

Aici „Pegas” e numai aparent un nume propriu; în realitate, el e o descripție deghizată. Să considerăm și următorul raționament:

(21.8) Tudor Arghezi este Ion Teodorescu.

Andrei știe că Tudor Arghezi este Tudor Arghezi.

Andrei știe că Tudor Arghezi este Ion Teodorescu.

Raționamentul (21.8) este invalid: el arată că nu putem substitui în contextul „Andrei știe că” doi termeni coextensivi. În tradiția russelliană, reacția naturală va fi aceea de a nega că „Tudor Arghezi” și „Ion Teodorescu” sunt de fapt nume. Dificultatea care apare aici – și care ne solicită să negăm caracterul de a fi termen al unei expresii – nu e lipsa denotatului, ci coextensivitatea. Or, cum avem foarte puțină garanție că o expresie care gramatical are forma unui nume propriu scapă celor două defecte, simțim foarte puternic presiunea de a susține că nici o expresie a limbii naturale (a limbii române în particular) poate fi redată ca o constantă într-un limbaj de ordinul întâi. Quine a cedat acestei presiuni. După el, toate propozițiile în care apar nume proprii trebuie analizate după calapodul celor ce conțin descripții. Să luăm, bunăoară, propoziția (21.7.1): Pegas este cal cu aripi. După Quine, expresia „Pegas” e în realitate o descripție: „acel v care pegasi-zează”; prin urmare (21.7.1) se poate formaliza ca:

$$(21.7.1') C((\exists v) P(v))$$

Să notăm că strategia lui Quine depinde de ipoteza că pentru orice nume se poate găsi o expresie predicativă care selectează unic referentul său. S. A. Kripke

a argumentat însă cu deosebită forță împotriva acestei ipoteze: după el, numele nu pot fi înlocuite cu descripții sau cu mănunchiuri de descripții. Dar chiar dacă s-ar depăși această obiecție, rămâne încă o dificultate. Intuitiv, noi considerăm că propoziția (21.7.1) este adevărată, în timp ce

(21.7.2) Pegas este crocodil.

e falsă. Or, potrivit strategiei lui Quine, (21.7.2) se poate formaliza ca

(21.7.2') $K((\exists v) P(v))$

Analizând propozițiile (21.7.1') și (21.7.2'), vedem că amândouă sunt false – ceea ce sigur că nu corespunde intențiilor noastre.

Dificultăți precum cele menționate aici pun o problemă gravă în fața încercării de a formaliza propozițiile și raționamentele din limba naturală în limbaje de ordinul întâi. Atât în limba română cât și în limbajele de ordinul întâi există termeni singulari; dar, cum am văzut, nu putem pune cu ușurință în corespondență aceste categorii de expresii. Reacțiile filosofilor în fața unei astfel de situații pot fi foarte diverse. Ele constau în acomodarea filosofiei lor a limbajului la dificultățile de felul celor menționate. La o extremă se plasează cei ce adoptă o perspectivă „pragmatică” față de chestiunea reprezentării termenilor singulari din limbile naturale în limbajele de ordinul întâi; la cealaltă extremă se așază filosofi care susțin un punct de vedere „metafizic”.

Pentru aceștia din urmă, e în afară de orice îndoială faptul că în limbile naturale există termeni singulari care se întâmplă să nu denote. Însă această împrejurare are semnificație logică: căci termenii singulari din limba naturală sunt termeni care năzuie să denote un obiect (chiar dacă uneori încercarea e lipsită de succes). Ca urmare, „Pegas” e tot atât de mult un termen singular cum sunt „5” ori „Bill Clinton”, iar „pătratul rotund”, „regele de astăzi al Franței” sunt tot atât de mult termeni singulari cât și „primul președinte al U.R.S.S.”. Dificultățile menționate sugerează altceva: că limbajele de ordinul întâi nu pot da o reprezentare corespunzătoare a structurii limbilor naturale atâta vreme cât nu pot acomoda termeni singulari nendenotativi.

Pentru filosofi cu un temperament mai „pragmatic”, problema se pune altfel: chestiunea existenței termenilor singulari nendenotativi în limba naturală le apare ca total irelevantă. Căci, fie că ei există, fie că nu există, de multe ori noi folosim diverse expresii ca termeni singulari fără să ne intereseze dacă ei denotă ceva; uneori folosim aceste expresii tocmai pentru a decide în acest sens (de pildă, când vrem să probăm că Dumnezeu există). Ceea ce contează e altceva: ca limbajele formale pe care le folosim să dea seamă de aceste situații.

Ambele aceste reacții pun în discuție capacitatea logicii de ordinul întâi de a face față situației și par să susțină că admiterea unei logici depinde de capacitatea ei de a oferi soluțiile căutate (chiar dacă, pentru aceasta, s-ar sacrifica

cerința de a fi de ordinul întâi). Logicianul și filosoful atașat logicii standard va căuta să reziste însă acestui diagnostic. Strategia sa va fi următoarea: mai întâi, el va încerca să producă o descriere cât mai precisă a problemei; apoi, el va căuta să producă unelte și căi de a scăpa din chingile care par să-l sugrume.

Problema – se va putea argumenta – este că relativ la limbajele de ordinul întâi noi admitem următoarele două teze care însă par incompatibile:

- a) există termeni singulari nedenotativi;
- b) cuantificatorii sunt interpretați referențial.

Logicianul care nu vrea să renunțe la logica de ordinul întâi are la dispoziție două căi: să nege fie prima fie cea de a doua teză. În primul caz el are la îndemână iarăși două opțiuni:

- a₁) să considere că toți termenii singulari sunt denotativi;
- a₂) să nege că există termeni singulari.

Prima opțiune, cum am văzut în paragraful anterior, a fost explorată de Frege și Meinong. Cea de-a doua este cea a lui Russell-Quine. Amândouă suferă însă de un defect: nu par să dea seamă de ceea ce se întâmplă în limbile naturale: faptul că există realmente termeni singulari nedenotativi (cum susține adeptul perspectivei „metafizice”), ori faptul că în multe contexte existența denotatului nu are o importanță crucială (cum susține adeptul perspectivei „pragmatice” că se întâmplă în limba naturală).

Cea de-a doua cale – negarea tezei (b) – a părut multora ca extrem de promițătoare. Să vedem în ce constă interpretarea referențială a cuantificatorilor. Vom lua ca exemplu cuantificatorul existențial. Fie ϕ un predicat cu o singură variabilă liberă v . Conform definiției (11.3) și teoremei (11.8) (ea se aplică fiindcă $(\exists v) \phi$ e o propoziție) și ținând cont de faptul că $(\exists v) \phi$ este o prescurtare pentru $(\forall v) \neg \phi$, înseamnă că într-un model M avem $M \models (\exists v) \phi$ dacă există un obiect x în domeniul A al lui M astfel încât $M \models \phi((x))$, cu alte cuvinte dacă există un obiect care satisface pe ϕ . Cum ne amintim, definiția (11.3) a fost construită tocmai pentru a ne asigura de faptul că satisfacerea unei expresii precum $(\exists v) \phi$ în M nu depinde de faptul dacă există un nume în L pentru fiecare obiect x din domeniul lui M . Adevărul lui $(\exists v) \phi$ depinde de faptul că există un obiect în domeniu care satisface pe ϕ , nu de caracteristicile lui L (de faptul că obiectele din domeniu au nume). Aceasta este interpretarea referențială a cuantificatorilor.

Respingerea acestei interpretări a dat naștere așa-numitei interpretări *substituționale* a cuantificatorilor. Ideea intuitivă care stă în spatele acesteia e aceea că

(i) $(\forall v) \phi$ este adevărată dacă pentru orice termen t al limbajului L $\phi(t)$ este adevărată;

(ii) $(\exists v)\varphi$ este adevărată dacă există un termen t al limbajului L astfel încât $\varphi(t)$ este adevărată.

Este evident că, dat fiind un model M , interpretarea substituțională coincide cu cea referențială atunci când următoarele două condiții sunt îndeplinite:

- 1) orice obiect din domeniu este denotat de un termen.
- 2) orice termen denotă ceva.

Știm că cele două condiții nu sunt adesea împlinite: cum am văzut, nu orice număr real are un nume; iar, pe de altă parte, „Pagas” nu denotă nimic. Dar se poate proceda în felul următor (aceasta e o variantă a modelelor Henkin definite în § 13). Fie un model M cel mult numărabil. Adăugăm limbajului L o mulțime C infinit numărabilă de constante individuale c și definim funcția de interpretare astfel încât: a) numai expresiile din C sunt tratate drept constante individuale (celelalte constante care, eventual, apăreau în L sunt luate ca descripții); b) $I(C)$ e definită pe domeniul A al lui M . Vom spune că I este o interpretare cuantificațional substituțională a lui L în modelul M .

E interesant să notăm că sub o astfel de interpretare avem:

(21.8) M nu este model pentru mulțimea $\{ \neg (\forall v)\varphi, \varphi(v/c_1), \varphi(v/c_2) \dots \}$

unde $c_1, c_2 \dots$ sunt toate constantele din C .

Dacă însă avem o interpretare referențială a cuantificatorilor, este posibil ca M să fie model pentru această mulțime; într-adevăr, dacă I e definită astfel încât $I(C)$ e strict inclusă în A , atunci e posibil ca pentru toți $c \in C$ să avem $\varphi(c)$, chiar dacă $(\forall v)\varphi(v)$ e falsă în M . Acest rezultat sugerează că interpretările substituțională și referențială a cuantificatorilor sunt diferite. Dar dacă e așa, înseamnă că logicianul care urmează calea a doua – aceea de a respinge interpretarea referențială a cuantificatorilor în vederea ocolirii conflictului cu teza existenței termenilor nendenotativi – nu are prea mari șanse să-și îndeplinească obiectivul. Totuși, lucrurile nu stau atât de rău. Se poate arăta că cele două interpretări coincid în cazul propozițiilor:

(21.9) Dacă Σ e o mulțime de propoziții, iar σ o propoziție, atunci: $\Sigma \models \sigma$ dacă orice interpretare cuantificațional substituțională care satisface propozițiile din Σ satisface de asemenea pe σ .

Desigur că în definiția relației $\models$ (definită în § 13) intervine ideea de interpretare cuantificațional referențială; sensul ei este: orice interpretare cuantificațional referențială care satisface pe Σ satisface și pe φ .

Demonstrație. Suficiența este trivială, fiindcă, așa cum am definit interpretările cuantificațional substanționale, ele sunt o subclasă a celor cuantificațional referențiale. Să dovedim deci necesitatea. Pentru aceasta, vom arăta că dacă nu are loc relația $\Sigma \models \varphi$, atunci există o interpretare cuantificațional substituțională care satisface pe Σ , dar nu și pe φ . Să presupunem, într-adevăr, că $\Sigma \models \varphi$ nu

are loc. Atunci mulțimea $\Sigma \cup \{-\phi\}$ este consistentă și, deci, are un model. Potrivit teoremei descendente Löwenheim-Skolem, există un model numărabil M în care sunt adevărate toate propozițiile din $\Sigma \cup \{-\phi\}$. Acum putem construi o interpretare I substituțională a lui $L \cup C$ în M . Evident, întrucât elementele mulțimii $\Sigma \cup \{-\phi\}$ sunt propoziții, această mulțime e satisfăcută în M sub I , q.e.d.

Adoptând interpretarea substituțională, trebuie modificată definiția (13.3) a relației de satisfacere. Dacă suntem însă înclinați să păstrăm această definiție, atunci va trebui să desțelenim altă cale de a răspunde dificultăților de felul celor menționate mai sus. Adepții logicii libere („libere“ de supoziții existențiale) sugerează că putem păstra înțelegerea referențială a cuantificatorilor, împreună cu ideea că există termeni singulari denotativi. Desigur însă că ceva trebuie totuși schimbat. Ei propun să modificăm condițiile în care suntem îndreptățiți să afirmăm o propoziție cuantificată. Ei resping următoarele două teze logice:

$$(21.10.1) \phi(t) \rightarrow (\exists v) \phi(v)$$

$$(21.10.2) (\forall v) \phi(v) \rightarrow \phi(v/t)$$

ca și regula

$$(21.10.4) \phi(v) / (\forall v) \phi(v)$$

Odată ce procedăm așa, renunțăm la însuși nucleul logicii de ordinul întâi. Problema logicianului liber e aceea de a elabora această idee în chip satisfăcător atât semantic cât și sintactic. Vom începe cu aspectul sintactic. Intuiția logicianului liber e aceea că în (21.10) nu putem trece de la antecedent la consecvent dacă termenul t nu este denotativ; așadar, potrivit lui expresiile (21.10) devin admisibile numai dacă în antecedent punem o condiție care să exprime această caracteristică a lui t . Să vedem cum procedează el. Să observăm că în logica standard e lege expresia:

$$(21.11) (t = t) \rightarrow (\exists v)(v = t)$$

(conform schemei axiomatice (21.10.1)); cum antecedentul este lege, se deduce consecventul (expresia (21.6.1)). În logica liberă însă, dat fiind că (21.10.1) nu mai e admisă, înseamnă că nu este lege logică (21.6.1): $(\exists v)(v = t)$. Cum am văzut, sensul acestei expresii este (adoptând interpretarea referențială a cuantificatorilor!) următorul: există un obiect care este denotația lui t . Așadar, (21.6.1): $(\exists v)(v = t)$ spune că t este un termen denotativ – ceea ce e tocmai condiția căutată. Să definim predicatul E (al *existenței*) în felul următor:

$$E(t) = \text{df. } (\exists v)(v = t)$$

Acum, păstrând interpretarea referențială a cuantificatorilor și putința de a defini cuantificatorul existențial prin cel universal ($(\exists v)$ ca prescurtare pentru $\neg(\forall v)\neg$), expresiile (21.10) vor fi înlocuite cu:

$$(21.12.1) (\phi(t) \cdot E(t)) \rightarrow (\exists v) \phi(v)$$

$$(21.12.2) ((\forall v) \phi(v) \cdot E(t)) \rightarrow \phi(v/t)$$

(Exercițiu: să se arate că (21.12.2) se obține din (21.12.1)). De asemenea, regula

$$(21.13) \quad \psi \rightarrow \varphi(t) / \psi \rightarrow (\forall v) \varphi(t/v)$$

(unde t nu apare în $\psi \rightarrow (\forall v) \varphi(t/v)$) e înlocuită cu:

$$(21.14) \quad \psi \rightarrow (E(t) \rightarrow \varphi(t)) / \psi \rightarrow (\forall v) \varphi(t/v)$$

(unde iarăși t nu apare în $\psi \rightarrow (\forall v) \varphi(t/v)$). Se observă ușor că în logica liberă nu putem proba, de pildă, că Dumnezeu există din aceea că Dumnezeu este identic cu Dumnezeu. Căci pentru aceasta avem nevoie de o premisă suplimentară ($(\exists v(v = \text{Dumnezeu}))$) – adică de exact ceea ce vrem să demonstrăm.

Să mai observăm următorul lucru: dacă în (21.13) se ia ψ ca mulțimea vidă, atunci obținem regula (21.10.4), care am văzut că nu este admisă în logica liberă. În această logică este admisă însă regula

$$(21.14') \quad (E(t) \rightarrow \varphi(t)) / (\forall v) \varphi(t/v)$$

Ea provine din 21.14) luând pe ψ ca vidă.

Una dintre cele mai importante legi logice care pot fi demonstrate în logica liberă este următoarea:

$$(21.15.1) \quad (\forall v) (\exists v') (v' = v)$$

Demonstrație. Expresia de mai jos este o tautologie:

$$(i) \quad (\exists v') (v' = t) \rightarrow (\exists v') (v' = t)$$

În același timp, (i) este o instanță a premisei regulii (21.14) (în care luăm pe ψ ca $\emptyset$). Aplicând această regulă, obținem imediat pe (21.15.1), q.e.d.

Să observăm acum că o subformulă a lui (21.15.1), anume $(\exists v') (v' = v)$ este, potrivit definiției lui E , $E(v)$. Atunci expresia noastră este echivalentă cu (21.15.2) $(\forall v) E(v)$

Am putea să citim expresia aceasta ca: orice există. Aceasta corespunde cu interpretarea dată de Quine cuantorului existențial. La întrebarea: ce există? Quine crede că răspunsul este foarte simplu: totul. A fi, arată el, este *a fi valoare a unei variabile care poate fi legată*. În (21.15.2) variabila legată este v ; există orice e valoare a lui v și face adevărată expresia ce rezultă din $E(v)$, înlocuind pe v cu un nume al acelui obiect. Dacă e adevărată $E(t)$, înseamnă că obiectul denotat de t există.

Pentru a înțelege mai bine diferența între acceptarea lui (21.10.2): $(\forall v) \varphi(v) \rightarrow \varphi(v/t)$ (legea specificării) și acceptarea lui (21.12.2): $((\forall v) \varphi(v) \cdot E(t)) \rightarrow \varphi(v/t)$ (legea restrânsă a specificării) să notăm mai întâi că în a doua expresie condiția suplimentară – echivalentă cu $(\exists v')(v' = t)$ – poate fi citită în mod legitim ca afirmând că t denotă o valoare a unei variabile legate (v'), sau, mai simplu (via dictum-ului lui Quine), că termenul t denotă. Prin urmare, spre deosebire de legea nerestrânsă a specificării, legea (21.12.2) nu spune nimic despre termenii nendenotativi; ea spune doar ceea ce putem face

atunci când termenii denotă. Din acest motiv, ea nu poate fi folosită pentru a deriva din propoziția

(21.16.1) Nimic (existent) nu e cal cu aripi.

propoziția

(21.16.2) Pegas nu este cal cu aripi.

Însă poate fi folosită pentru a deriva din (21.16.1) și

(21.16.3) Bucephal există.

propoziția

(21.16.4) Bucephal nu este cal cu aripi.

Prin urmare, potrivit logicii libere nu putem deduce din afirmații universale decât afirmații despre obiectele existente. Totuși, cum vom vedea imediat atunci când vom aborda aspectul semantic, în logica liberă putem fi de acord că propoziția (21.16.2) e falsă, dar putem admite în același timp că propoziția

(21.16.5) Pegas nu este crocodil.

e adevărată. Tot ceea ce s-a dovedit aici este că legea restrânsă a specificării nu poate fi folosită pentru a deriva pe (21.16.2) din (21.16.1).

În sfârșit, să notăm că în cele de mai sus am folosit în chip esențial identitatea. Relația de identitate a fost tratată în capitolul anterior ca având o natură logică; pe de altă parte, al doilea ingredient folosit pentru a defini pe E este cuantificatorul existențial, aplicat unei variabile. Și acesta a fost tratat ca ținând nu de limbajul de formalizat, ci de instrumentele logice folosite pentru a formaliza un limbaj. Existența e construită, prin urmare, ca un predicat care presupune doar logica – nu e deci un predicat al unui limbaj, alături de celelalte predicate.

Dacă însă logica folosită ar fi mai slabă (de pildă, nu ar conține identitatea) și nu am putea construi predicatul E ca mai sus, cum s-ar putea proceda? Desigur că am putea lua predicatul E ca primitiv și am putea stipula pe (21.12) și (21.14). Să numim CCE (calculul cuantificațional liber cu predicatul E) logica ce rezultă astfel. Ceea ce se poate arăta (rezultatul a fost probat de Meyer și Lambert) este că CCE poate fi tratată ca o logică cu cuantificatori restrânși.

Fie, într-adevăr, un limbaj L în care există un predicat E . Presupunem că în formalizarea lui L am folosit doar conectivele logice – și $\rightarrow$ și cuantificatorul $\forall$ (celelalte conective logice, precum și cuantificatorul $\exists$ se pot defini ca de obicei). Fie acum un limbaj $L' = L \cup \{Q\}$, unde Q este un predicat unar.

Vom defini o traducere* a formulelor lui L în cele ale lui L' în felul următor:

(i) $P(t_1, \dots, t_n)^* = P(t_1, \dots, t_n)$

(ii) $E(t)^* = Q(t)$

(iii) $(\neg \varphi)^* = \neg (\varphi^*)$

(iv) $(\varphi \rightarrow \psi)^* = \varphi^* \rightarrow \psi^*$

(v) $((\forall v)\varphi)^* = (\forall v)(Q(v) \rightarrow \varphi^*)$

Meyer și Lambert au demonstrat că:

(21.17) O propoziție ϕ a lui L este teoremă a CCE dacă propoziția ϕ^* (a lui L') e o teoremă a logicii de ordinul întâi.

Demonstrație. Suficiența e trivială: trebuie arătat doar că traducerea oricărei axiome a lui CCE este o teoremă a logicii de ordinul întâi și că, dacă ϕ^* și $(\phi \rightarrow \psi)^*$ sunt teoreme ale logicii de ordinul întâi, atunci și ψ^* e teoremă a logicii de ordinul întâi.

Necesitatea e mai complicată. Aceasta pentru că, desigur, logica de ordinul întâi pare mai puternică decât logica liberă – și deci nu e trivial faptul că logica de ordinul întâi nu permite să demonstrăm mai multe teoreme decât ne permite cea liberă. Demonstrația curge astfel: pentru orice propoziție ϕ^* a lui L' , să construim o propoziție ϕ^{**} substituind în ϕ^* pe Q cu E .

Lema 1: ϕ^* este o teoremă a logicii de ordinul întâi dacă ϕ^{**} este o teoremă a logicii de ordinul întâi.

Lema 2. În CCE e teoremă:

$$(\forall v)(E(v) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall v)\psi$$

Lema 1 este evidentă. Să trecem la lema 2. Avem

- (i) $(\forall v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall v)E(v) \rightarrow (\forall v)\psi)$ (teoremă în CCE)
- (ii) $(\forall v)E(v) \rightarrow ((\forall v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall v)\psi)$ (din (i), prin logica propozițiilor)
- (iii) $(\forall v)(E(v))$ (teoremă în CCE)
- (iv) $(\forall v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi(v/t)$ (din (ii) și (iii) prin regula detașării)
- (v) $((\forall v)\psi(v) \cdot E(t)) \rightarrow \psi(v/t)$ (instanță a lui (21.12.2))
- (vi) $((\forall v)\psi(v) \cdot E(t)) \rightarrow \psi(v/t)$ (din (v), prin logica propozițiilor)
- (vii) $(\forall v)\psi(v) \rightarrow (E(t) \rightarrow (E(t) \rightarrow \psi(v/t)))$ (din (vi), prin logica propozițiilor)
- (viii) $(\forall v)\psi(v) \rightarrow (\forall v)(E(v) \rightarrow \psi(v))$ (din (vii), prin (21.14))
- (ix) $(\forall v)(E(v) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall v)\psi$ (din (iv) și (viii) q.e.d.)

Din cea de-a doua lema decurge că în CCE ϕ și ϕ^{**} sunt echivalente (pentru cazul când ϕ este $(\forall v)\phi$, apelăm la lema 2; în celelalte cazuri, rezultatul este imediat). Dar atunci ceea ce ne rămâne e să arătăm că ϕ^{**} e demonstrabilă în CCE dacă ϕ^{**} e demonstrabilă în logica de ordinul întâi. Suficiența este trivială. Rămâne doar să se arate că necesitatea are loc, adică:

Lema 3. Dacă ϕ^{**} e demonstrabilă în logica de ordinul întâi, atunci ea e demonstrabilă în CCE .

Dificultatea se observă ușor că apare atunci când ϕ^{**} a fost demonstrată în logica de ordinul întâi folosind legea specificării. Dar, prin inducție asupra demonstrației, putem arăta că toate instanțele de folosire ale acestei legi sunt de asemenea instanțe de folosire a schemei mai slabe:

$$(\forall v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow (E(t) \rightarrow \psi(v/t))$$

care se poate demonstra în *CCLE*. Această inducție e lăsată ca exercițiu pentru cititor.

Să trecem acum la semantica logicii libere. În semantica logicii de ordinul întâi, determinarea valorii de adevăr a unei propoziții precum

(21.18) Socrate este filosof.

la un model M se făcea, ne amintim, astfel. Mai întâi, se determina domeniul A al lui M . Mulțimea A era domeniul în care variabilele luau valori (acest fapt era exprimat, între altele, în aceea că în definirea relației de satisfacere șirurile de obiecte la care se apela erau șiruri de obiecte din A). Apoi, se defineau interpretarea constantei individuale „Socrate” în A și interpretarea predicatului „filosof” în A ; în sfârșit, se cerceta dacă interpretarea lui „Socrate” era cuprinsă în interpretarea lui „filosof”, adică dacă

$I(\text{Socrate}) \in I(\text{filosof})$

În logica liberă această strategie nu mai poate funcționa, fiindcă se poate întâmpla ca o constantă individuală să nu aibă interpretare în A ; într-un model în care Socrate nu există, $I(\text{Socrate})$ nu e definită. Logicianul clasic avea în această situație, așa cum am văzut, mai multe căi de urmat: a) să excludă termenii singulari nedenotativi din clasa acelor expresii pentru care trebuie dată o interpretare directă (strategia Russell-Quine); b) să adauge domeniului A noi obiecte — denotate ale acestor termeni (strategia Frege-Meinong); c) să admită doar modele în care „obiectele” considerate sunt lingvistice — termenii înșiși ai limbajului (strategia substituțională).

La rândul său, logicianul liber de asemenea are mai multe opțiuni. Voi menționa trei direcții în acest sens.

a) *Strategia domeniilor exterioare*. Voi aminti aici propunerea lui N. Cocchiarella a „obiectelor posibile și reale”. Cocchiarella propune ca în definirea modelului M pentru un limbaj L să considerăm nu un singur domeniu, ci două domenii — fie acestea A și A' , unde $A' \subseteq A$. Noutatea constă în noua mulțime (posibil vidă) A' . Să notăm mai întâi că predicatele sunt interpretate în A (deci $I(P^n) \subseteq A^n$). Dar A' este domeniul cuantificatorilor $\forall$ și $\exists$. Acești cuantificatori au, în logica liberă, un sens existențial; obiectele din A' sunt cele reale, efective. Fie t un termen. Dacă în modelul M propoziția

$(\exists v)(v = t)$

e adevărată, înseamnă că $I(t) \in A'$.

Mulțimea A este a obiectelor posibile (chiar dacă nu neapărat reale). Desigur că am putea introduce doi noi cuantificatori — unul universal „ $\wedge$ ” și unul existențial „ $\vee$ ” — al căror domeniu să fie A . Acești cuantificatori nu au însă un sens existențial. Legea specificării e satisfăcută de $\wedge$ și $\vee$, dar nu și de $\forall$ și $\exists$, care satisfac numai legea restrânsă a specificării. Pe de altă parte, evident că avem însă

$$(21.19.1) (\wedge v)\varphi \rightarrow (\forall v)\varphi$$

$$(21.19.2) (\exists v)\varphi \rightarrow (\forall v)\varphi$$

Semantica lui Cocchiarella e diferită de cea meinongiană. Aceasta pentru că în logica liberă a lui Cocchiarella se introduce ideea de cuantificator restrâns cu sens existențial, care satisface restricțiile impuse de logica liberă.

Semantica lui Cocchiarella are o serie de avantaje tehnice: mai întâi, ea permite să atașăm valori de adevăr propozițiilor în care apar termeni singulari nedemonstrativi; apoi, ea e o semantică *bivalentă*: aceste valori de adevăr sunt adevărul și falsul; în al treilea rând, e posibil să se dea o demonstrație de completitudine pentru logica liberă construită astfel. În sfârșit, această semantică este intuitiv acceptabilă. De pildă, în ea se poate construi un model în care propoziția

(21.7.1) Pegas este cal cu aripi.

e adevărată, în timp ce propoziția

(21.7.2) Pegas este crocodil.

e falsă. În același timp, din (21.7.1) se poate deduce

(21.7.1'') $(\forall v) C(v)$

dar nu și aserțiunea existențială

(21.7.1''') $(\exists v) C(v)$

Dar propunerea semantică a lui Cocchiarella are și dezavantaje. E de notat că cele mai multe sunt de natură filosofică – ea nu satisface opțiuni filosofice. Cea mai importantă, la fel ca și în cazul strategiei lui Meinong, este aceea că e neclar statutul elementelor din domeniul exterior $A-A'$; ce natură au ele? Cum le putem individua? În al doilea rând, chiar dacă statutul obiectelor „doar posibile” ar fi clarificat, rămâne problema felului în care în această semantică se face apel la ele. De pildă, să presupunem că în nici un izvor transmis despre Pegas nu e menționată înălțimea acestuia; mulți filosofi, inclusiv Meinong, au admis că unele obiecte precum Pegas sunt „incomplete”, adică există proprietăți P astfel încât ele nu au nici P , nici $\text{non-}P$. De aici ar decurge că propoziția

(21.20) Pegas are doi metri înălțime.

nu e nici adevărată, nici falsă. Semantica lui Cocchiarella nu admite această posibilitate. Mai departe, această semantică e atașată unei alte supoziții dubioase: anume, să ne gândim la predicatul „mai înalt”. Aceasta e interpretat ca o mulțime de perechi din A . Dar atunci propoziția:

(21.21) Pegas e mai înalt decât Bucephal.

va fi adevărată sau falsă, potrivit acestei semantici. Or, prin ea se compară obiecte existente cu obiecte inexistente (în M) – ceea ce mulți filosofi nu ar admite.

b) *Strategia convențiilor*. Ea constă în următoarele (Schock, Burge): funcția I interpretează simbolurile predicative în domeniul A al modelului, în modul uzual, și interpretează unele constante individuale (posibil toate, posibil doar

unele, posibil nici una) în A . Valorile de adevăr pentru propozițiile atomare în care nu apar constante individuale neinterpretate se determină în modul obișnuit; dar pentru toate propozițiile atomare în care apar astfel de constante se stabilește convențional o anumită valoare de adevăr – adevărul sau falsul. Apoi, valorile de adevăr pentru expresiile complexe se stabilesc în mod uzual.

Această strategie poate lua două forme. Cea *pozitivă* atașează tuturor propozițiilor atomare în care apar constante individuale neinterpretate adevărul; cea *negativă* atașează tuturor acestor propoziții falsul.

În favoarea primei forme contează faptul că astfel expresia

$$(21.22) \ c = c$$

rămâne lege logică, ceea ce e de dorit. Ea pune sub semnul întrebării însă posibilitatea de a efectua substituția identicilor. Într-adevăr, să presupunem că într-un model constanta c nu e definită, dar c' e definită, iar pentru un predicat P avem $I(c') \in I(P)$. Atunci, cum semantica e pozitivă, propozițiile

$$(21.23.1) \ c = c'$$

și

$$(21.23.2) \ P(c)$$

sunt adevărate. Însă, conform condițiilor noastre, propoziția

$$(21.23.3) \ P(c')$$

e falsă. Însă $P(c')$ se obține din $P(c)$ prin substituția unor termeni identici: trebuie să conchidem că substituția identicilor e încălcată în acest caz.

Semantica negativă pare să aibă mai multe argumente în favoarea sa. Istoric, ea este în rând cu teoria lui Russell a descripțiilor, care atașă falsul oricărei propoziții de forma $P((\lambda v) R(v))$; un alt motiv este acela că ea face dreptate ideii că obiectele inexistente nu pot sta în nici un fel de relație cu cele existente. Propoziția (21.21): Pegas e mai înalt decât Bucephal e falsă. În al treilea rând, legea substituției identicilor e păstrată etc.

Dar cel puțin două obiecții pot fi ridicate aici. Mai întâi, intuitiv nu pare corect să considerăm că propoziția

$$(21.24) \ \text{Pegas a fost călărit de Bellerophon}$$

este falsă în orice model în care nici „Pegas” și nici „Bellerophon” nu au denotat; dimpotrivă, considerăm adevărată această propoziție în unele modele. Apoi, faptul că această semantică este concordantă cu poziția lui Russell nu e neapărat un argument în favoarea ei. Căci se poate argumenta că decizia privind valoarea de adevăr într-un model a propozițiilor în care apar termeni singulari nendenotativi (în acel model) nu trebuie făcută a priori; mai degrabă, decizia trebuie să țină cont de situația particulară în discuție, de natura problemei: considerente de natură pragmatică pot fi uneori foarte importante.

c) *Strategia supervaluărilor*. Ea a fost introdusă de către B. van Fraassen. Să pornim de la propoziția

(21.20) Pegas are doi metri înălțime.

Am văzut că potrivit convenției pozitive, ea e adevărată într-un model dacă „Pegas” nu denotă (în acel model); potrivit convenției negative, ea e falsă într-un model dacă „Pegas” nu denotă. Pe de altă parte, am menționat că s-ar putea lua această propoziție ca neavând valoare de adevăr. Van Fraassen consideră însă că aceste convenții țin de filosofia limbajului, nu de logică: logica nu trebuie să încorporeze astfel de presupuneri, oricât de puternice ar fi rațiunile invocate în sprijinul lor. Altfel zis, logica trebuie să fie independentă de filosofia limbajului. Din punct de vedere logic, crede van Fraassen, nu trebuie să reținem decât ce au în comun *toate* aceste convenții: logica vizează „produsul logic” al tuturor acestor convenții.

Să construim acum noțiunea de supervaluare ca un astfel de „produs logic”. Fie un model M . Luăm o interpretare I ; pe baza ei, se atașează valori de adevăr în modalitatea uzuală pentru propozițiile atomare în care toți termenii denotă; celor în care apar termeni care, potrivit lui I , nu denotă, li se atribuie, potrivit unei convenții la alegere, o valoare de adevăr. Apoi, în modul uzual, se atribuie valori de adevăr propozițiilor compuse. Să numim *valoare* (relativă la M) o funcție care atașează potrivit procedurii descrise mai sus o valoare de adevăr fiecărei propoziții. O *supervaluare* (relativă la M) se definește astfel: ea atașează valoare de adevăr unei propoziții dacă *toate* valuările atașează acelei propoziții valoarea adevăr; și îi atașează valoarea fals dacă *toate* valuările îi atașează valoarea fals. Dacă acea propoziție primește valoarea adevăr sub unele valuări și valoarea fals sub altele, atunci supervaluarea nu îi atașează nici o valoare de adevăr.

Vom observa că dacă, de exemplu, „Pegas” nu denotă, atunci supervaluarea definită nu va atașa vreo valoare de adevăr propoziției

(21.20) Pegas are doi metri înălțime.

În schimb, ea va atașa adevărul propoziției

(21.20.1) Pegas are doi metri înălțime sau Pegas nu are doi metri înălțime.
și falsul propoziției

(21.20.2) Pegas are doi metri înălțime și Pegas nu are doi metri înălțime.

Faptul că într-o propoziție apare un termen care nu denotă nu conduce direct la o anumită valoare de adevăr atașată ei potrivit supervaluarii; unele propoziții sunt adevărate, altele false, altele nu au valoare de adevăr.

Dar și această strategie are anumite dezavantaje. Mai întâi, ea nu atașează nici o valoare de adevăr propozițiilor (21.7.1) și (21.7.2) – ceea ce nu pare să concorde cu intuițiile noastre. Apoi, cum propoziția

$$c = c$$

nu primește vreo valoare de adevăr dacă c nu denotă, legea substituiri identicilor

cade. În al treilea rând, soluția lui van Fraassen pare mai degrabă un *deus ex machina* pentru a rezolva problemele acolo unde nu avem criterii de a alege între alternative; de pildă, în dezvoltarea metodei van Fraassen introduce restricții în definirea valărilor care sunt motivate doar tehnic¹ (= permit obținerea unor rezultate tehnice interesante), dar care nu au și o motivație teoretică.

§ 22. Exerciții

1. Demonstrați în SA teoremele $T_1 - T_{10}$.
2. În silogistică se deosebesc patru figuri, după poziția pe care o are „termenul mediu” în premise. Ele sunt următoarele:

$M - P$	$P - M$	$M - P$	$P - M$
$S - M$	$S - M$	$M - S$	$M - S$
$S - P$	$S - P$	$S - P$	$S - P$
figura I	figura a II-a	figura a III-a	figura a IV-a

(literale S, P, M stau pentru subiectul concluziei, respectiv predicații concluziei și termenul mediu. De pildă, un mod de figura a III-a are forma (felul propozițiilor ce apar în el e ales la întâmplare):

Toți M sunt P .

Unii M sunt S .

Unii S sunt P .

Arătați ce moduri din figurile a II-a, a III-a și a IV-a sunt demonstrabile în SA.

3. Ce relații între mulțimi reprezintă interpretările în modelul standard al SA ale relațiilor E și O ?

4. Arătați că în L' sunt demonstrabile schemele axiomatice corespunzătoare axiomelor A_1, A_3 și A_4 ale SA.

5. Fie $T = \{\varphi : \varphi \text{ este de forma } MiM\}$ o teorie în L' .

Arătați dacă:

$T \vdash \psi$

unde ψ este o formulă care

- a) exprimă subalternarea unei particulare față de o universală;
- b) exprimă conversiunea unei propoziții universal afirmative;
- c) exprimă un mod silogistic demonstrabil în SA cu premise universale, dar cu o concluzie particulară.

¹ De pildă, se cere ca pentru orice valoare valoarea oricărei propoziții de forma $c = c$ să fie adevărul; dacă $I(c)$ și $I(c')$ nu sunt definite ambele, atunci valoarea lui $c = c'$ este adevărul pentru orice valoare etc.

6. Să se arate că:

$$\text{Ar}(\varphi \cdot \psi) \leftrightarrow \text{Ar}(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \text{Ar}(\varphi \rightarrow \psi)$$
 pentru orice formule φ și ψ din L' .
7. Să se arate că:

$$\text{Ar}(\varphi \cdot \psi) \leftrightarrow \text{Ar}(\varphi) \cdot \text{Ar}(\psi)$$
 pentru orice formule φ și ψ din L' ;
8. Construiți un model al SA al cărui domeniu să fie mulțimea numerelor naturale, iar relația A să fie interpretată ca relația de divizibilitate între numere.
9. Formalizați potrivit strategiei logicii multisortate propozițiile:
- (19.3)
 - Unii oameni au vizitat în câțiva ani toate țările din Europa.
 - Unii oameni sunt înzestrați cu toate calitățile unui bun general.
10. Formalizați aceleași propoziții potrivit strategiei cuantificării restrânse.
11. Considerați un limbaj L' de ordinul doi care nu conține constante individuale și termeni funcționali. Formalizați pe L' ca o logică bisortată L'_2 .
12. Construiți traducerea propozițiilor lui L'_2 într-un limbaj L^2 . Arătați că L^2 este limbaj de ordinul întâi. Demonstrați propoziția (19.8) pentru L'_2 .
13. Dați exemple de descriții în care:
- apar numai expresii predicative;
 - apar nume proprii;
 - apar alte descriții;
 - apar conective logice (conjuncția, disjuncția).
14. Analizați, potrivit strategiilor lui Meinong și Frege, propozițiile (20.6) Cum diferă cele două tipuri de analiză?
15. Analizați, potrivit fiecăreia din cele două strategii, propoziția: Muntele de aur este un munte.
16. Cum se pot analiza, potrivit strategiei lui Russell, propozițiile (20.3.2)–(20.3.5)?
17. Cum se pot analiza, potrivit strategiei lui Russell, propozițiile (20.9)? Este rezultatul obținut în concordanță cu intuițiile noastre?
18. Formalizați următoarele propoziții, interpretând negația atât ca având o intrare primară cât și ca având o intrare secundară:
- Președintele de astăzi al Rusiei nu este M. Gorbaciov;
 - M. Gorbaciov nu este președintele de astăzi al Rusiei;
 - Inițiatorul perestroicii nu este președintele de astăzi al Rusiei;
 - Tânărul cu ochelari nu este secretarul particular al președintelui de astăzi al Rusiei.
19. Un argument în favoarea strategiei lui Russell decurge astfel:
 Propoziția „Regele de astăzi al Franței este chel” e evident falsă, fiindcă Franța e o republică. Dar atunci ar decurge că propoziția „Regele de astăzi al

Franței nu este chel" trebuie să fie adevărată. Strategia lui Russell arată cum e posibil așa ceva.

Este corect acest argument?

20. Apreciați următorul argument, pe care Russell l-a folosit împotriva lui Meinong:

Cum muntele de aur nu există, existentul munte de aur nu există. Dar toate instanțele schemei „Toți AB sunt A ”, de pildă „Cartea legată în piele este legată în piele” sunt adevărate. Prin urmare, propoziția „Existentul munte de aur există” e adevărată. Dar aceasta contrazice faptul că existentul munte de aur nu există.

21. Să se formalizeze următoarele propoziții:

- a) Există cel mult un student în clasă.
- b) Există exact un student în clasă.
- c) Există cel puțin n studenți în clasă.
- d) Există exact n studenți în clasă.

22. Să se analizeze potrivit strategiei lui Quine propozițiile:

- a) Cerber este câine.
- b) Cerber este câinele lui Hades.
- c) Cerber nu există.

23. Se definesc următoarele noțiuni:

(i) Fie L' un limbaj în care cuantorii sunt interpretați referențial, iar M un model al lui L' . Atunci I este o *interpretare canonică* pentru M dacă I aplică mulțimea constantelor lui $L' \cup C$ pe domeniul lui M .

(ii) O *valuare* este o funcție indusă de un model și o interpretare care atașează fiecărei propoziții a lui L o valoare de adevăr.

(iii) O valoare se numește *canonică* dacă este indusă de un model și de o interpretare canonică.

(iv) L este un *limbaj cuantificațional substituțional* = df există un limbaj L' care are aceeași sintaxă ca și L și valurile admisibile ale lui L sunt exact valurile canonice ale lui L' .

(v) O *mulțime model* (Hintikka) este o mulțime X de propoziții (ale unui limbaj L) cu următoarele proprietăți:

(a) X conține toate propozițiile de forma $c = c$, și nu conține atât o propoziție ϕ cât și negația ei $\neg \phi$;

b) Dacă $\neg \neg \phi \in X$, atunci $\phi \in X$;

(c) Dacă $\neg (\phi \cdot \psi) \in X$, atunci $\neg \phi \in X$ sau cel puțin $\neg \psi \in X$;

(d) Dacă $(\phi \cdot \psi) \in X$, atunci $\phi \in X$ și $\psi \in X$;

(e) Dacă $\neg (\forall v) \phi \in X$, atunci $\neg \phi(v/t)$ pentru cel puțin un termen t ;

(f) Dacă $(\forall v) \phi \in X$, atunci $\phi(v/t) \in X$ pentru toți termenii t ;

(g) Dacă $c = c' \in X$ și $\phi \in X$, atunci $\phi(c/c') \in X$.

Să se arate că:

(i) Dacă L este un limbaj cuantificațional substituțional iar Σ este o mulțime de propoziții ale lui L , atunci Σ este realizabilă dacă Σ este conținută într-o mulțime model.

(ii) Fie ϕ o formulă a unui limbaj cuantificațional substituțional L , iar $v_1, \dots, v_n$ toate variabilele libere ce apar în ϕ . Atunci în orice model M și sub orice interpretare admisibilă a lui L , ϕ are valoarea adevăr dacă $\psi = (\forall v_1) \dots (\forall v_n) \phi$ este validă în L .

24. Folosiți cuantificatorii referențiali și substituționali pentru a analiza următorul raționament:

Flămânzila a fost numit așa datorită poftei sale de mâncare.

Cineva a fost numit așa datorită poftei sale de mâncare.

25. Demonstrați:

a) propoziția (21.12.2) pe baza lui (21.12.1);

b) regula $(E(t) \cdot \phi(t)) \rightarrow \psi / (\exists v) \phi(v) \rightarrow \psi$

unde t nu apare în $(\exists v) \phi(v) \rightarrow \psi$.

26. În strategia domeniilor exterioare, să luăm mulțimile A și A' ca disjuncte (aceasta e propunerea logicienilor Leblanc și Thomason). Construiți *in extens* această semantică.

27. În strategia domeniilor exterioare, luați A și A' ca distincte și puneți $A = \{*\}$ (propunerea lui D. Scott). Arătați că în această semantică sunt validate expresiile:

a) $(\neg E(t) \cdot \neg E(t')) \rightarrow t = t'$

b) $\neg E(t') \rightarrow t = *$

c) $* = (\exists v) (v \neq v)$

28. Încercați să comparați:

a) propunerea lui Cocchierella și noțiunea de cuantificare restrânsă;

b) propunerea lui Leblanc-Thomason și strategia lui Meinong de abordare a termenilor nedenotativi;

c) propunerea lui D. Scott și strategia lui Frege de abordare a termenilor nedenotativi.

29. Fie o valoare V care satisface următoarele condiții:

(i) $V(t = t) = 1$ (= adevărul)

(ii) Dacă numai unul dintre termenii t și t' este interpretat, atunci $V(t = t') = 0$ (= falsul)

(iii) $V(\phi(v/t)) = V(\phi(v/t'))$ dacă sau $V(t = t') = 1$ sau $I(t) = I(t')$

Să presupunem că oricare două valori V și V' (relative la același model) sunt astfel încât $V((\forall v) \varphi(v)) = V'((\forall v) \varphi(v))$ unde $\varphi(v)$ e o expresie în care singura variabilă liberă este v , iar $\varphi(v')$ este $\varphi(v/v')$. Ce proprietăți are supervaluarea indusă de valorile de tipul lui V ?

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

Cititorul care, mergând la vreo bibliotecă mare, își așează pe masa de lucru opt-zece cărți în al căror titlu e cuprinsă sintagma „logică filosofică” este surprins să constate că, în contra așteptărilor sale, multe din lucrările din fața sa aproape că nu au nimic comun, care să le facă să fie de „logică filosofică”. Într-adevăr, subiectele tratate diferă foarte mult între ele; tehnicile utilizate variază mult de la lucrare la lucrare; autorii citați copios într-o carte lipsesc cu desăvârșire într-alta etc. Impresia este că în acea arie de preocupări pe care mulți cercetători o numesc „logică filosofică” nu avem o paradigmă generală, că diverse grupuri, comunități științifice lucrează fără a avea strânse legături între ele, ba uneori chiar ignorându-se reciproc.

Să luăm, de pildă, pe de o parte cărți precum *Philosophical Logic* de Sybil Wolfram, Routledge, London, 1990, sau *An Introduction to Philosophical Logic* de A.C. Grayling, Duckworth, London, 1990 și, pe de altă parte, monumentalul *Handbook of Philosophical Logic*, editat de D. Gabbay și F. Guenther în patru volume, la D. Reidel, Dordrecht, 1984–1986. Primul volum al tratatului editat de Gabbay și Guenther cuprinde o introducere în metateoria logicii standard (a propozițiilor și a predicatelor), semantici alternative și o prezentare a unor logici de nivel superior. Același stil este păstrat și în volumele următoare: al doilea, dedicat extinderilor logicii standard (de pildă, logici modale, temporale, denotice); al treilea, dedicat alternativelor la logica standard (logica parțială, polivalentă, a relevanței, intuiționistă, liberă, cuantică); al patrulea, care utilizează tehnicile formale construite pentru a aborda diverse probleme de filosofia limbajului (cuantificarea, proprietățile, indexicalitatea, presuposițiile, atitudinile propoziționale etc.). În întreg tratatul, gradul de tehnicitate este foarte ridicat; iar într-o lucrare introductivă precum aceasta pe care cititorul o are acum la dispoziție nu am putut aproape deloc să apelez la materialul cuprins în tratat (cu excepția unor remarci privind tratarea descripțiilor și a existenței). La un pol opus se află lucrările lui Wolfram și Grayling. Aproape că nu găsim nici o formulă în aceste cărți. Conceptul de logică filosofică utilizat pare mai degrabă acela de analiză logică a unor chestiuni filosofice precum problema existenței și a descripțiilor, ideea de adevăr, problematica necesității, analiticității și esențialismului, ideile de propoziție și de judecată. Atari chestiuni sunt foarte apropiate de filosofia logicii, și nu e de mirare că în multe lucrări nu se face o distincție clară între filosofia logicii și logica filosofică. În aceeași direcție pe care o ilustrează aceste două cărți, a se vedea și S. Blackburn, *Philosophical Logic*, Milton Keynes, Open University Press, 1980, P.F. Strawson (ed.), *Philosophical Logic*, Oxford, 1967, W. Quine, *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, 1970 etc.

O lucrare care încearcă să mențină un echilibru între cele două orientări e cea publică în două volume de un grup de cercetători olandezi sub pseudonimul L.T.H. Gamut cu titlul *Logic, Language and Meaning*, University of Chicago Press, Chicago, 1991, al cărei prim volum l-am folosit de altfel în prezentarea unor teme în capitolul IV.

Pentru metateoria logicii propozițiilor au urmat îndeaproape prezentarea făcută de C. C. Chang și H. J. Keisler în *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973; aceeași lucrare a constituit baza prezentării metateoriei logicii predicatelor în capitolul III. Pentru diverse proprietăți ale aritmeticii lui Peano (de pildă, modelele ei nonstandard) se poate consulta G. Boolos, R.C. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 1974, iar pentru logica infinitară, logica de ordinul doi G. Takeuti, *Proof Theory*, North-Holland Amsterdam, 1975. Mai dificil, dar foarte instructiv prin bogăția informației conținute este tratatul editat de J. Barwise, *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977 (ediția rusă, în patru volume, publicată la Moscova de Editura Nauka în 1982–1983 cuprinde noi dezvoltări ale temelor abordate).

Pentru capitolul IV, în afara lucrărilor deja menționate, foarte folositoare sunt W. Quine, *Methods of Logic*, London, 1952, W. Kneale și M. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, Editura Dacia, Cluj, 1974, ca și tratatul *Silogistica. Teoria clasică și interpretările moderne*, de I. Didilescu și P. Botezatu, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.

Cel ce se apleacă asupra listelor de lucrări citate în cărțile de „logică filosofică” întâlnește însă din plin cărți și articole de logică matematică, pe de o parte, și cărți și articole de filosofia limbajului, morală ori a minții, pe de altă parte. Cititorul are, desigur, libertatea să decidă înspre ce direcție își va purta pașii.